باسمه تعالی

فهرستبرگه منابع چاپ سنگی - اداره مخطوطات

شماره ثبت:	۲۸۲۶۱
رده‌بندی دیویی:	۱۳۱۹ ب ۳۲۹ ل ۱۲ ط
سرشناسه:	نجم الدوله، عبدالغفار بن علی محمد، ۱۲۵۵-۱۳۲۶ ق.
عنوان قراردادی:	
عنوان:	بدایة الجبر: اصول جبر مقابله نظری و عملی [درسی]
کاتب:	تاریخ کتابت:
محل نشر:	تهران ناشر: مطبعه مدرسه دارالفنون تاریخ نشر: ۱۳۱۹ ق
صفحه شمار:	۳۲۰ ص مصور☐ درسی☑ گراور یا افست☐
زبان:	فارسی ابعاد: ۱۰/۵x۱۷/۲ نوع خط: نسخ
روش تهیه:	وقفی☐ اهدایی☑ خریداری☐ ارسالی☐
توضیحات:	ادیب بجنوردی (موسوی نسل) تاریخ ثبت: مهر ۱۳۸۱
یادداشتها:	
موضوع(ها):	۱. جبر - متون قدیمی تا قرن ۱۴.
شناسه(های) افزوده:	الف. ادیب بجنوردی، حسین، اهداکننده. ب. عنوان.
فهرستنگار:	رسزرا. تاریخ فهرستنگاری: مهر ۸۹

قران

انچه از امیر علی گرفتم ۳۸/۵

از اتحاد ... ۶۵/ قران

۱۰۳/۵

۱۰/۳۵ تومان

بن طلب دوازده ... ۱۶/۵ قران

[library stamp]

سازمان کتابخانه ها، موزه ها و مرکز اسناد آستان قدس رضوی
اداره مخطوطات

نام کتاب: بدایة الجبر - اصول جبر و مقابله نظری و عملی

مؤلف: عبدالغفار نجم الدوله

موضوع: جبر — زبان: فارسی

سال چاپ: ۱۳۱۹ ق — محل چاپ: تهران

شماره عمومی: ۲۸۲۶۱ — کتابخانه / بخش:

وقفی / خریداری: ادیب کنبوردی — تاریخ: مهر ۱۳۴۱

طول: ۱۷٫۲ — عرض: ۱۰٫۵ — شماره صفحه ها: ۳۲ صفحه

مصور ☐ درسی ☒ گراوری ☐ افست ☐

ملاحظات: مخصوص مدرسه مبارکه دارالفنون و مکاتب ابتدائیه

قران

انچه از آقا میرزا علی گرفتم ۳۸،۵ قران

از آقا شیخ ملک ۶۵، قران

۱۰۳،۵

۱۰،۳۵ تومان

پس طلبکار دوازده ۱۶،۵ قران

۶۲۶۱۰

کتابخانه آستان قدس

اسم کتاب بدایة الجبر فارسی
مصنف عبدالغفار نجم الدوله
مؤلف
خطی سنگی لیتو تهران
چاپی
سال چاپ یا تحریر ۱۳۱۹ ق عدد اوراق
جزء کتب ریاضی شماره
شماره عمومی ۳۰۴۵۶ شماره قبض
واقف ادیب بجنوردی تاریخ وقف
طول عرض گنجه

شماره ثب
رده‌بندی
سرشناسه
عنوان قرا
عنوان:
کاتب:
محل نشر:
صفحه شم
زبان:
روش تهیه:
توضیحات:
یادداشتها:
موضوع(ها)
شناسه(های)
فهرستنگار:

۵۱۲
ب ۳۲۹ ن
۱۴۶۹۱۴

بدایة الجبر

اصول جبر و مقابله

نظری و عملی

مخصوص

مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون

و مکاتب ابتدائیه

تألیف

حقیر

ابن الفاضل النحریر علی محمد

عبد الغفار

نجم الدوله

طهران

چاپ جدید

سنه ۱۳۱۹

حق طبع محفوظ

۵۱۲
ب ۳۲۹ ن

آستان قدس رضوی

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین والصلوة والسلام علی خیر خلقه محمد وآله اجمعین

وبعد چنین گوید حقیر فقیر عبد الغفار که تا امروز قریب چهل سال میشود که در مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون مکرر فنون مختلفهٔ ریاضی را درس گفته من جمله جبر و مقابله را که مرتبه‌اش بعد از حساب هم افق هندسه است یک نسخه تا اوایل درجهٔ دوم ترتیب داد اما شاگردان سابق بزرگ و باسواد و با قوه بودند بقدر اخور حال آنها نوشت و آن طور نیست که شاگردان مبتدی این زمان میتوانند درک کنند لازم دید باقتضای وقت مختصری تا اواخر درجهٔ دوم ترتیب دهد خیلی واضح و روشن و نزدیک بفهم جوانان نوآموز که در تحصیل آن افسرده و ملول و متنفر نشوند بلکه عبارات مانوس و اسلوب مطبوع و امثله مرغوب

باعث

باعث مزید شوق و رغبت آنها شود در تحصیل چنین علمی بلند و مکرر این مسئله طرح شده که چرا بحث جبر و مقابله با وجود فوائد مهمه اش باید مردود و کم رواج باشد جواب گوئیم که باعث عدم شیوع این فن شریف ظاهرا این باشد که باعتقاد عمومی از علوم مشکله است و میتوان جوانان را بآن نزدیک نمود ولی تاکنون جبر و مقابله را طوری ننوشته اند که نزدیک بفهم اطفال باشد مصنفین دانائی که تا عصر ما در این شاخه ریاضیات مصنفات ترتیب داده اند از روی بلندی نظر و سدره نشینی در اعالی افاق علوم همواره جوانان ذکی و زیرک و باهوش را منظور خاطر داشته اند و علاوه بران مؤلفات ایشان بیشتر حجیم و مبسوط است باندازه که مدتی مدید میبایستی تا یکدوره کامل اموخته شود پس باین دو لحاظ شجاعان قوی دل تا بحال قدم بکرسی از این میدان تحصیل گریخته اند

و حالا ما میخواهیم ثابت نمائیم که میتوان از این محذورات دوری جست و جبر و مقابله را در سلک اصول مقدماتی آورد و پس مشغول میشویم بنوشتن این کتاب طوریکه اطفال رسمی بتوانند بفهمند با وجود اینکه نقید که از اصطلاحات فن خارج نشویم و من باب احتیاط بعلامت یک ستاره نموده ایم هر مطلب را که در دوره اول نباید گفته شود باین شکل *

نمونهٔ جبر و مقابله

باب اوّل

فصل اوّل

تعریفات

۱— جبر و مقابله علمی است که در آن بحث میشود از یافتن قاعده برای حل نمودن هر نوعی از مسائل

در بیان یک مثال میتوان فهمانید غرضی را که از وضع این شاخهٔ فنون ریاضی داریم فرض میکنیم که عدد ۲۴ جواب مسئلهٔ باشد اما از روی نظر باین عدد ما را ممکن نیست بفهمیم و بگوئیم که آنرا بچه وجه حاصل نموده اند چرا که میشود بدست آمده باشد از جمع ۱۸ با ۶ یا از ضرب ۴ در ۶ یا غیر از اینها پس بجبر و مقابله تدارک این عیب میشود باینکه در الضمن که جواب مسئله را میدهد بما مینماید راهی را که باید پیمود تا رسید بآن نتیجهٔ مطلوب و بنابراین قاعده بدست ما میدهد برای حل نمودن جمیع مسائلی که اختلاف با آن مسئله نداشته باشد جز در کم و زیادی معلومات (و آنها مقادیری هستند که در بیان مسئله معین شده اند)

۲— حروف — در جبر و مقابله رسم چنین است که مقادیر را

بحروف

بحروف تهجی بنمایند و حروف اوایل فرنگی اَلِف با a b c و d
..... مخصوص شده اند برای نمایش مقادیر معلومه و حروف اواخر
x و y و z مخصوص مقادیر مجهوله اند

تنبیه چون این کتاب برای اطفال فارسی زبان نوشته میشود مناسب آن است که حروف را از الف بای فارسی خودمان اختیار کنیم اما چون معلمین این فن که همه از تربیت یافتگان این حقیر اند امروز مانوس بعضا شده اند بحروف فرنگی و باینکه معادلات و رموز را از طرف چپ بنویسند بمثل خواندن اعداد و نوشتن بطرز فارسی آنها را ناگوار است بعلاوه بعد از آنکه شاگرد بوضع اصطلاحات و رموز مانوس شد چه فرنگی باشد و چه ایرانی چرا که جبر و مقابله از زبانی دیگر است لهذا ما نظر بتسهیل امر تعلیم پیرو میل آنها شدیم

۳ — علامات علاوه بر حروف بعضی علامات و رموز هم در جبر و مقابله مستعمل است

علامت جمع اینست + و تلفظ شود بعلاوه

مثلا ۳ + ۴ را تلفظ کنند ۴ بعلاوه ۳

علامت تفریق اینست − و تلفظ کنند منها

مثلا ۲ − ۷ را تلفظ کنند ۷ منهای ۲

علامت

علامت ضرب اینست × تلفظ کنند ضرب در

مثلا ۳ × ۸ تلفظ کنند ۸ ضرب در ۳

بکذا ب × ج تلفظ کنند ج ضرب در ب

و بجای علامت × گاه یک نقطه میگذارند مثلا ۳ × ۸ و ۳ · ۸

یک معنی هستند

و بطور کلی هر وقت اعمال در حروف باشد رسم نیست که هیچ علامت ضربی

استعمال کنیم مثلا حاصل ضرب ج را در ب و د چنین مینویسیم

د ب ج (و عادتا حروف را بترتیبی که در الف با دارند پهلوی هم

مینویسیم)

برای نمودن عمل قسمت رسم چنین است که مقسوم علیه را در زیر

مقسوم مینویسیم و بخطی افقی آنها را از هم جدا میکنیم مثلا $\frac{۴}{۵}$ یعنی

۴ قسمت بر ۵ است و $\frac{ج}{ب}$ یعنی ج قسمت شود بر ب و گاه

نیز دو نقطه مابین دو مقدار قسمت مودی قرار میدهند باینصورت

۴ : ۵ و ب : ج

هرگاه بخواهیم بنمائیم که دو مقدار با همدیگر برابرند این علامت را = مابین

آنها قرار میدهیم مثلا بخواهیم بنمائیم که ۴ بعلاوه ۷ مساویست با

۱۱ چنین مینویسیم ۱۱ = ۷ + ۴

این

این علامت (> یا <) برای نمودن نامساوی بودن دو مقدار است
و همیشه فتحهٔ علامت را بطرف مقدار بزرگتر قرار دهیم مثلاً بخواهیم بنمایم
که ۵ بزرگتر است از چهار چنین مینویسیم ۴ > ۵ و اینطور تلفظ کنیم ۵
بزرگتر از ۴ و ۵ > ۴ خوانده شود ۴ کوچکتر از ۵

۴ — قوت عدد عبارت است از حاصلی که بدست میاید از ضرب
چند عامل مساوی با آن عدد مثلاً ۱۶ قوهٔ چهارم ۲ است چراکه آن
حاصل شود از ۲×۲×۲×۲

۵ — ضلع یا ریشهٔ عدد عبارت از عددی دیگر است که چون یکمرتبه یا
چند مرتبه در نفس خود ضرب شود عدد اول را عاید نماید مثلاً ضلع چهارم
۱۶ عدد ۲ است چراکه ۱۶ = ۲×۲×۲×۲
موافق بیان مذکور ضلع عددی شد که در تشکیل قوت بکار رود

تنبیه — قوهٔ دوم و قوهٔ سیم عدد را مربع و مکعب آن عدد
گوئیم مثلاً ۴ مربع ۲ است و ۸ مکعب آن

۶ — کوئفیسیان یا معبّر عددیست که قرار میدهند در طرف چپ
مقداری تا بنماید که چند مرتبه باید آن مقدار را تکرار نمود مثلاً در س ۴
که تلفظ میکنیم چهار آر قم ۴ معبّر س است و اگر س مساوی
باشد با ۵ آنوقت ۲۰ = ۵×۴ = س ۴

۷ـ اکسپوزان یا مفتر عددیست که قرار میدهند در طرف راست مقداری و کمی بالای آن تا بنماید درجهٔ قوتی را که باید آن مقدار را رساند

مثلا در a^4 و 2^3 که تلفظ میکنیم a چهار و ۲ بقوت سه
۴ و ۳ مفتر اند در a و ۲ را $a^4 = a \times a \times a \times a$
و $2^3 = 2 \times 2 \times 2$ و اگر فرض کنیم $a = 5$ چنین میشود
$a^4 = 5 \times 5 \times 5 \times 5 = 625$ و بنا بر همین فرض $a = 5$
در بالا ذکر شد که $4a = 4 \times 5 = 20$ پس از روی این دو مثال
درست واضح میشود که باید خوب ملتفت بود تفاوت معتبر را
با مفتر و اشتباه نکرد

۸ـ رادیکال و این متعلق است باین علامت $\sqrt{\ }$ که قرارش میدهیم در بالای مقداری که بخواهیم استخراج ضلعش را بنمائیم و در فتحهٔ علامت قرار میدهیم عدد ضلع اول استخراج نمودنی را مثلا $\sqrt[5]{a}$ نمایندهٔ ریشهٔ پنجم a است و $\sqrt{a}$ جذر a است چرا که در استخراج جذر رسم نیست نماینده را بنویسند

۹ـ جمله ـ در تعبیر جبری که مرکب باشد از چند مقداری که باین دو علامت + یا − از همدیگر جدا شده باشد هرکدام را با انضمام علامتش

جمله گوئیم مثلا تعبیر $ج - ب + ا$ شامل سه جمله است و جملهٔ اول را چنان منظور داریم که گویا با علامت + است

۱۰- مونم وغیره - هر تعبیر جبری که زیاده از یک جمله دارا نباشد آنرا مونم گویند (یک جمله) و آنکه صاحب دو جمله باشد بینوم (جملتین) و آنکه صاحب سه جمله باشد ترینوم و بطور کلی هر تعبیری که صاحب دو جمله یا بیشتر باشد پولینوم گویند (کثیر الجمله) مثلا $ب^۲ ا$ و $\frac{ا^۲ - ب^۲}{ا + ب}$ را مونم گوئیم و $ب^۲ + ا^۲$ و $ب^۲ - ا^۲$ را بینوم و $ا^۲ + ۲ اب + ب^۲$ و $ب^۲ + ب ا - ۲ ا^۲$ را ترینوم و خلاصه $ب - ا$ و $ج^۳ ب^۳ + ج^۲ - ج ب^۲ + ب ا$ را پولینوم

۱۱- جمله‌های متشابهه و آنها جمله‌هائی باشند صاحب یکنوع حروف با مفترهای شخص آنها در علامت و معتبر آنها قیدی نیست هر چه باشند مثل $۲ ب ا$ و $۵ ب ا$ و $ب^۲ ا - ۲ ب ا$ و $۲ ب ا \frac{۳}{۴}$ که همه متشابهند (هر مقداری که عاری از مقسم و معتبر باشد در حکم آنست که ا معتبر دارد و ا مفتر مثلا $ب = ۱ ب^۱$).

۱۲- در جبر و مقابله مثل حساب چهار عمل اصلی است

فصل دوّم

جمع

۱۳- دستور - در جمع کردن چند مقدار جبری باید آنها را با

علاماتی

علاماتی که دارند دنبال همدیگر نوشت بدون تغییر علامات

۱۴ – چون باین دستور حرکت نمودیم نتیجه واقعی بدست آمده چراکه دارای همه مقادیر هست که مقصود ما جمع آوری آنها بود و بنابراین بقدر مجموع آنهاست ولی بعد از این طور نوشتن نباید غفلت نمود از اختصار جمله های متشابهه

و باین قاعده جمع دو مینوم که + سه و مه – سه چنین میشود.

مه – ح + گ + سه در مثال دوم جمع نمودن این سه پولینوم هست ح – گ + سه

و ۲ح + سه – ۲سه و ۵ح – سه ۲ + ۳سه و حاصل جمع چنین میشود.

سه + گ – ح + ۲ سه – گ + ۲ح + ۳ سه + ۲ گ – ۵ح

و بعد از تحویل و اختصاری که در جمله های متشابهه سه ۳ + سه ۲ + سه و

گ ۲ + گ – گ + و ح ۵ ح + ح – راه میابد حاصل چنین میشود

ع سه + ۲ گ – ۴ح

۱۵ – در وقت عمل نظر بمزید آسانی کار قرار اینست که جمله های متشابهه را زیر همدیگر بنویسند و در ضمن عمل جمع آنها را مختصر کنند و تحویل نمایند

مثال

[illegible]

مجمع

مجموع $3ab^5+5a^2b^4-3a^3b^3+6a^4b^2$

امثلهٔ مشق و مسائل در جمع

۱– این دو پولینوم را با هم جمع کنید $5a^2-a^3+ab$ و

$-3a^2+2a^3+2c^3+3ab$

۲– این چند پولینوم را با هم جمع کنید

$a^5b^4+2a^4b^3-\frac{1}{4}a^3b^2+19a^2b+a$

$-3a^5b^4+4a^4b^3-5a^3b^2-16a^2b-5a$

$2a^5b^4-5a^4b^3+6a^3b^2+a^2b+11a$

۳– این چند پولینوم را با هم جمع کنید

$5a^4b^7-4a^3+6a^2b-4c$

$-3a^3+4a^4b^7-3a^2+1$

$5c-6ab+4a+6$

$-7+3ab-5+\frac{1}{4}a$

۴– هرگاه شما a قران داشته باشید و ۳ قران هم بشما بدهند آنوقت بهمه جهت چه دارید

۵– شخصی ۶ قران و b قران و ۷ قران بسه فقره دخل برده باشد مجموع دخل او چه میشود

۶- شخصی بشما مقروض است [illegible] قران و دیگر [illegible] قران و [illegible] قران پس
بهمه جهة چند قران قرض دار شماست

۷- شخصی که امروز بسن ۲۳ سالگی باشد در [illegible] سال دیگر چه سن خواهد داشت

۸- چاپاری تا حال ۱۵ فرسخ راه رفته و باید [illegible] فرسخ دیگر هم بپیماید
بهمه جهة چند فرسخ پیموده

۹- شخصی یکنوبت [illegible] قران خرج کرد و نوبت دیگر [illegible] قران و برای او
[illegible] قران باقی ماند پس بهمه جهة چند قران داشت

۱۰- مسافری باید ۲۵ فرسخ بعلاوه [illegible] راه طی کند و نیز ۳۵ فرسخ
بعلاوه [illegible] پس تمام مسافت پیمودنی او چه خواهد بود

فصل سیم
در تفریق

۱۷- در تفریق حساب دیده اید که چون تفاضل را بر عدد کوچکتر بیفزائیم
حاصل برابر عدد بزرگتر میشود حال چون این اصل را بسط دهیم گوئیم که
تعیین کردن تفاضل ما بین دو مقدار عبارت است از یافتن مقداری
سیمی که چون بر مفروق بیفزائیم اش با تا باید کند مفروق عنه را
مثلا تفریق نمودن [illegible] + [illegible] - [illegible] از [illegible] - [illegible] + [illegible] عبارت
است از اینکه طلب کنیم مقداری دیگر که چون بیفزائیمش بر پولینوم

$d - e + f$ باعاید کند $a + b - c$ را

پس گوئیم که تحصیل مقدار مطلوب بایستی که مفروق $d - e + f$
را بعد از تغییر علامات بنویسیم در دنبال مفروق عنه $a + b - c$
تا حاصل شود $a + b - c - d + e - f$ که تفاضل دو
پولینوم باشد چراکه اگر بیفزائیم $d - e + f$ را بر آن نتیجه ما حاصل
شود این تعبیر

$$a + b - c - d + e - f + d - e + f$$

یا $a + b - c$ چراکه $-d$ تلافی کند با $+d$ و هکذا
$+e$ با $-e$ و $-f$ با $+f$

و میتوان همین دلیل را در هر مقداری دیگر هر چه باشد تکرار نمود چراکه دو
مقدار مفروق و مفروق عنه مطلق بودند پس حالا میتوانیم دستور
کلی برای عمل تفریق اینجا ذکر کنیم

۱۸ - دستور — در یافتن تفاضل مابین دو مقدار جبری
مفروق را بعد از تغییر علامت هر جمله اش بنویسید در دنبال
مفروق عنه و بعد جمله های متشابه را اگر باشند تحویل و مختصر کنید

مثال

اول تفریق کنید از این مقدار $4a - ab^2 + 5ab^3$
این

این مقدار را $3a^2+3ab-b^2$

و جواب اینست $4a-a^2b+5a^3b^2-2a^4-3ab+b^2$

دوم – از این مقدار $3ab^2+a^2b^3+a^3b^4$

تفریق کنید اینرا $-ab^2+2a^2b^3-4a^3b^4+3a^4b^5$

تا باقی بماند $3ab^2+a^2b^3+a^3b^4+ab^2-2a^2b^3+4a^3b^4$ [illegible]

$-3a^4b^5$

یا بعد از تحویل و اختصار جمله های متشابهه

$4ab^2-3a^2b^3+5a^3b^4-3a^4b^5$

۱۹ – گاه در تفریق جبری عوض اجرای عمل قناعت میکنیم بمجرد نمایش مقصود و در این حالت مطروح را دنبال مطروح عنه مینویسیم بی آنکه علامات آنرا تغییر دهیم بلکه آنرا جوف پرانتز (جامعه) قرار میدهیم و علامت تفریق – را جلو آن مینویسیم

مثلا در موقع نمایش که باید $a^2-2ab+b^2$ تفریق شود.

از $a^2+2ab+b^2$

چنین مینویسند $a^2+2ab+b^2-(a^2-2ab+b^2)$

۲۰ – تنبیها – در جبر و مقابله بسیار اتفاق میافتد لزوم عمل تفریق پس باید آنرا خیلی ورزش نمود

تنبیه

۲۱- تنبیه ۲- موافق دستور فوق تفاضل مابین a و $-b$ اینست $a+b$ و بنابراین با تفاضل دو مقدار بزرگتر شود از هر کدام فرداً فرد

امثله و مسائل در تفریق

۱۱- تفاضل مابین a و $b+a$ را بنمائید

۱۲- تفاضل این دو پولینوم را معلوم کنید

$$2a-3b+cd \quad , \quad a+b+cd$$

۱۳- مطلوب است حاصل این تفریق ذیل

$$(a^2b^4 - a^3b^4 + 4a^4b^3) -$$

$$-(-2a^2b^6 - a^3b^4 + 9a^4b^3)$$

۱۴- معلوم کنید تفاضل این دو پلینوم را $a+\sqrt{b}$ و $-a+\sqrt{b}$

۱۵- شخصی هر روز a قران دخل میکند و ۵۰ر۱ قران خرج میکند پس اندوختهٔ یومیه اش چه مبلغ است

۱۶- چه قدر بوده است سن شخصی در n سال قبل با بر انکه بدانیم امروز ۴۰ ساله است

۱۷- دو نهر وارد استخری میشوند اولی هر ساعت a ذرع مکعب میدهد دومی b ذرع مکعب اما از زیرا چیست که هر ساعت c ذرع مکعب از انجا خارج میشود پس در هر ساعت چند ذرع مکعب متراکم میشود

۱۸- مجموع سه ضلع مثلثی $2m$ است و یکی از آن اضلاع c پس جمیع دو ضلع دیگر چه قدر است

۱۹- اندازهٔ یک زاویهٔ مثلثی ۴۷° ۲۴′ است و زاویهٔ دیگر A پس قدر زاویهٔ سیم چیست

۲۰- مساحت دایره πR^2 است و سطح دایرهٔ دیگر πr^2 تفاضل وسعت آن دو دایره چیست

تنبیه۱- دستوریکه باید یافت تغییر وسعت کلبل است

تنبیه۲- $\pi = \frac{c}{d} = ۳,۱۴۱۵۹$ یعنی که π (پی) نسبت محیط است بقطر و حرف π حرف اوّل کلمه است که در یونانی بمعنی محیط دایره است

فصل چهارم
در ضرب

۲۲- **تعریف**- غرض از ضرب همانطور که در حساب ذکر شده تکرار اجزای مضروب است مرتبا بعده اجزای مضروب فیه اما در جبر و مقابله عمل را از طرف چپ ابتدا میکنند

۲۳- در عمل ضرب جبری چهار قاعده باید منظور شود

اوّل قاعدهٔ ضرب حروف

دوّم قاعدهٔ ضرب معتبّرین

سیّم قاعدهٔ ضرب مفتّرین

چهارم قاعدهٔ ضرب علامات

۲۴ – قاعدهٔ حروف – ضرب چندین حرف بهمین است که آنها را با

دنبال همدیگر بنویسند و اغلب هیچ علامتی هم مابین آنها نگذارند

مثلاً ضرب a در b و در c و در d حاصلش چنین میشود

$$abcd$$

۲۵ – قاعدهٔ اعداد معتبّره – در ضرب مقادیر یکه با معتبر باشند

باید ابتدا معتبرها را در هم ضرب نمود و در پهلوی آن حاصل حروف اجزای عاملها را

مثلاً میگوئیم که ضرب $5a$ در $3b$ میشود $15ab$ چرا که

$5a\times3b=5\times a\times3\times b$ و چون میتوان در ضرب ترتیب

عاملها را تغییر داد (در حساب ثابت شده که بتغییر دادن مواضع عاملها تغییری

در حاصل ضرب دست نمیدهد) $5a\times3b=$

$=5\times a\times3\times b=5\times3\times a\times b=15ab$

۲۶ – قاعدهٔ اعداد مفتّره – هرگاه عاملها را حروفی مشترک باشد

باید یکی از آنها را در حاصل نوشت و مفتّری برای او قرار داد

برابر مجموع مفتّرهای عاملها

مثلاً

۲۸۲۶۱

مثلا حاصل ضرب a^3b^2 در a^2b میشود a^5b^3 چراکه

$$a^3b^2 \times a^2b = a^3 \times b^2 \times a^2 \times b = a^3 \times a^2 \times b^2 \times b$$

اما

$$a^3 \times a^2 \times b^2 \times b =$$

$$= a \times a \times a \times a \times a \times b \times b \times b = a^5 \times b^3 = a^5b^3$$

۲۷ – قاعده علامات – در این قاعده چهار حالت مختلف باید منظور داشت

اول اینست که دو مقدار ضرب نمودنی هر دو مثبت باشند باین صورت $+ \times +$

دوم ضرب منفی باشد در مثبت باین صورت $- \times +$

سیم ضرب مثبت باشد در منفی باین صورت $+ \times -$

چهارم هر دو منفی باشند باین صورت $- \times -$

۲۸ – حالت اول – حاصل ضرب دو مقدار مثبت نیز مثبت است چراکه در ضرب غرض تکرار مضروب است آنقدر که مضروب فیه آحاد بنماید پس در این ضرب $+b \times +a$ باید $+a$ را بعده تکرار نمود که $+b$ بما بنماید یعنی b دفعه $+a$ یا

$+a + a + a + a \ldots$ یا خلاصه $+ab$

فهو المطلوب

۲۹ – حالت دوّم – حاصل ضرب مقدار منفی در مثبت منفی است

چراکه مثلاً در ضرب $a - a +$ در $b +$ (در اجرای ضرب جبری
در جمیع حالات مضروب مضروب فیه را بهمین ترتیب با فراز
بدهید و بعد ابتدا از چپ بترتیب هر جزو مضروب را تکرار کنید
باندازهٔ هر جزو مضروب فیه ن ۲۲ و عمل هر ضرب جزو را باید
موافق قواعد ن ۲۳ بجا آورد و حاصل های متشابه را نظر به
سهولت تحویل شان زیر همدیگر بنویسید موافق ن ۲۱ و ما بعد آن)

مضروب	$+a - a = 0$
مضروب فیه	$+b$
حاصل ضرب	$+ab - ab = 0$

مضروب که $a - a +$ چون برابر صفر است حاصل نیز صفر میشود اما
حالا ذکر نمودیم که $b + \times a +$ میشود $ab +$ پس
$b + \times a -$ میشود $ab -$ چراکه هیچ مقداری دیگر نمیتواند
تلافی کند با $ab +$

۳۰ – حالت سیم – حاصل ضرب مقدار مثبت در منفی
میشود منفی چراکه در ضرب $a +$ در $b - b +$

مضروب	$+a$
مضروب فیه	$+b - b = 0$
حاصل ضرب	$+ab - ab = 0$

۳۱ - حالت چهارم - حاصل ضرب دو مقدار منفی میشود مثبت

مضروب: $+a - a$ در $+b - b$

مضروب	$+a - a = 0$
مضروب فیه	$+b - b = 0$
دو حاصل جزء	$+ab - ab = 0$
	$-ab + ab = 0$
حاصل کل	$+ab - 2ab + ab = 0$

چون هر یک از دو عامل صفر است معلوم حاصل ضرب هم صفر میشود و سابق (حالت دوّم) دیدید که حاصل $+a - a$ در $+b$ میشود $+ab - ab$ یعنی معادل صفر و چون حاصل جزء اوّل صفر شد دوّم نیز باید بشود صفر امّا در حالت سیّم دیدید که $+a \times -b$ میشود $-ab$ پس باید که حاصل $-a \times -b$ بشود $+ab$ والّا حاصل کلّ معادل صفر نمیشود

۳۲ - حاصل آنچه ما در خصوص قاعدهٔ علامات شرح دادیم بطور اختصار چنین میشود

$+ \times + = +$ یعنی مثبت در مثبت میشود مثبت (بعلاوه در بعلاوه میشود بعلاوه)

$- \times + = -$ منفی در مثبت میشود منفی (منها در بعلاوه میشود منها)

$+ \times - = -$ مثبت در منفی میشود منفی (بعلاوه در منها میشود منها)

$- \times - = +$ منفی در منفی میشود مثبت (منها در منها میشود بعلاوه)

از این دستور چنین معلوم میشود که هرگاه هر دو عامل صاحب یک علامت شد

حاصل مثبت است والّا منفی

۳۲ – حالا قواعد مذکوره فوق را در چند مثال جاری میکنیم

مثال اوّل

(نظر باینکه تحصیل حاصل ضرب آسان شود رجوع کنید بجای ۱۱)

مضروب $a+b$

مضروب فیه $a+b$

دو حاصل جزو
$$a^2+ab$$
$$+ab+b^2$$

حاصل کل $a^2+2ab+b^2$

مثال دوّم

$$a-b$$
$$a-b$$
$$a^2-ab$$
$$-ab+b^2$$
$$a^2-2ab+b^2$$

مثال سیّم

$$a+b$$
$$a-b$$
$$a^2+ab$$
$$-ab-b^2$$
$$a^2-b^2$$

مثال چهارم

$$a^2+2ab+b^2$$
$$a+b$$
$$a^3+2a^2b+ab^2$$
$$a^2b+2ab^2+b^3$$
$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

مثال پنجم

$$x+1$$
$$x$$
$$x^2+x$$

مثال ششم

$$\begin{array}{r} 3a^2 + 4b - 5b^2 - 6 \\ 4a \\ \hline 12a^3 + 16ab - 20ab^2 - 24a \end{array}$$

مثال هفتم

$$\begin{array}{r} a + 1 \\ a + 1 \\ \hline a^2 + a \\ a + 1 \\ \hline a^2 + 2a + 1 \end{array}$$

مثال هشتم

$$\begin{array}{r} a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\ a + b \\ \hline a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3 \\ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4 \\ \hline a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \end{array}$$

۲۴ — تنبیه ۱ — هرگاه بخواهیم همینقدر بنمائیم که باید عمل ضربی بجا آورده شود نه آنکه فعلاً بجا آوریم در اینصورت هر عاملی را در جوف جامعه گذارند و بیشتر اوقات این دو عامل را بعلامت × از همدیگر جدا کنند باین طرز

$$(a+b+c)\times(a+b-c) = (a+b+c)(a+b-c)$$

و این هر دو شکل نشان میدهند که باید $c + b + a$ ضرب شود در $c - b + a$ و اگر یکی از دو عامل مونوم باشد آنرا ساده قرار میدهند در جنب یا راست پولینومی که در جامعه نوشته شده مثلاً در نمودن حاصل ضرب m در $b + a$ چنین نویسند $m(a+b)$ یا $m \times (b+a)$

تنبیه ۲ — هرگاه مقداری مشخص در جمیع جمله های پولینومی دیده شود باید آنرا عامل مشترک گذاشت و آن موقوف است باینکه آنرا از جمیع جمله های پولینوم برداریم و بنویسیم آنرا در جنب یا راست پولینوم

که

که در جوف جامعه باید قرارش دهیم دیگران مقداری که باید عامل مشترک قرارش داد در یکی از جمله ها تنها باشد یعنی آن جمله منحصر بهمین فرد باشد باید بجای آن واحد نوشت

مثلا دراین دو جمله $bx + ax$ میخواهیم x را عامل مشترک قرارش دهیم چنین مینویسیم $(b + a)x$ واگر حالا عمل تغییر دوم را بجا آوریم بعینه تغییر اول حاصل میشود پس این دو برابرند

وچون عامل مشترک را از پولینوم بیرون کشیدن عملی است خیلی عجیب و دایر و مهم لهذا دو سه مثالی اینجا برای مشق بیاوریم

اول $ax+bx-cx = x(a+b-c)$

دوم $ax+x = x(a+1)$

سیم $ax^2+x^2 = x^2(a+1)$

امثله و مسائل چند در ضرب

۲۱- حاصل ضرب $4a^5$ را در $3ab^2$ معلوم کنید

۲۲- مطلوبست حاصل a^2b^3 در $\frac{4}{3}b^2c^2$ -

۲۳- ضرب $-21ab^2m$ در $\frac{2}{3}a^2bm^3$ بعمل آورید

۲۴- چه میشود حاصل ضرب $-\frac{4}{5}mn^2$ در $-\frac{3}{4}am^2n$

۲۵- مربع این شکل را معلوم کنید $a-x$

۲۶- مکعب این صورت را $ab - c$

۲۷- قاعدهٔ مثلثی b است و ارتفاعش h مساحتش چقدر است

۲۸- چه قدر میشود مساحت مربعی که ضلعش a است

۲۹- مطلوب است مساحت مستطیلی که قاعده اش b است و ارتفاعش h

۳۰- چه قدر میشود مساحت مربعیکه بنا شود بر مجموع دو خط a و b

۳۱- مطلوب است مساحت مربعی که بر تفاضل همان دو خط بنا شود

۳۲- مطلوب است مساحت ذوذنقه که قاعده اطولش B باشد و اقصر b و ارتفاعش h

۳۳- مطلوب است سطح دائره که شعاعش R باشد و محیطش C

۳۴- و بنا بر آنکه بدانیم $C = 2\pi R$ دستوری دیگر برای سطح دائره معلوم کنید

۳۵- و بنا بر آنکه $R = \frac{d}{2}$ دستوری دیگر بدست آورید

۳۶- این بلینوم را بدو عاملش تجزیه کنید $a^2 - x^2$

۳۷- این تعبیر جبر را $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ بدل کنید به تعبیری دیگر معادل آن

۳۸- این صورت را $25 - 14$ بدل کنید بصورتی دیگر

۳۹ – دستور مساحت سطح کرهٔ اینست $4\pi R^2$ و مطلوبست مقدار آن تعبیر بنابرانکه $R =$ ۲۰ متر

۴۰ – در همان دستور $4\pi R^2$ بنابرانکه $R = \frac{a}{2}$ تعبیر تازه چه خواهد بود

۴۱ – ارتفاع استوانهٔ H است و شعاع قاعده اش R پس حجم آن چه اندازه میشود

۴۲ – ابعاد مضاعف دکالیتر چه قدر میشود بنابرانکه ارتفاعش برابر باشد با قطر قاعده اش

۴۳ – مطلوبست حجم مخروط بنابرانکه شعاع قاعده اش R باشد و ارتفاعش H

۴۴ – چه قدر میشود حجم مکعبی که ضلعش a باشد

۴۵ – چه قدر میشود حاصل ضرب a^m در a^n در a^p

فصل پنجم

در تقسیم

۳۵ – تعریف – در جبر و مقابله مثل حساب غرض از تقسیم اینست که در صورت معلوم بودن حاصل ضرب دو عامل و یکی از آنها و طلب کنیم عامل دیگر را

۳۶ -- قبل از آنکه دورتر شویم من باب مذاکره باز میآوریم اینجا دو اصل کثیرالاستعمال را

اوّل - هر کسری در حکم خارج قسمت صورت است بر مخرجش (مثلا میگوئیم $\frac{۴}{۵}$ خارج قسمت ۴ است بر ۵ چرا که ۱ تقسیم بر ۵ خارج قسمتش میشود یک خمس یا $\frac{۱}{۵}$ پس مقسوم اگر چهار برابر شود خارج قسمت میشود چهار خمس یا $\frac{۴}{۵}$ و این دلیل کلیت در جمیع اقسام کسور)

دوم - چون ضرب کنیم یا قسمت نمائیم دو جمله کسر را به عددی در مقدار آن کسر تغییری عارض نشود

۳۷ - نظر بارتباط تامی که محقق است میان ضرب و قسمت قواعد متعلقه بعمل قسمت از ملزومات و مستنبطات قواعدیست که در ضرب بثبوت رسید پس بعد از تذکر این قواعد در عمل قسمت هیچ اشکالی روی ندهد

۳۸ - در قسمت دو مونم - بنابر اصل اوّلی که حال بیان کردیم خارج قسمت مونمی بر مونم دیگر عبارت است از کسری که صورتش مقسوم باشد و مخرجش مقسوم علیه و آنوقت اگر مقتضی شد باید آن کسر را مختصر و ساده نمود در چند مثال ذیل امتحان عمل محض اطمینان این است که خارج قسمت را ضرب کنیم در مقسوم علیه تا حاصل برابر مقسوم شود

امثلهٔ چند

مثال

مثال اوّل - میخواهیم $6a^2bc^3$ را بر $2abc^2$ قسمت کنیم

خارج قسمت اینست $3ac$

$$\frac{6a^2bc^3}{2abc^2} = \frac{3\times 2aabc^2c}{2abc^2} = 3ac$$

بنابرآنکه عاملهای مشترک در صورت و مخرج را محو مینمائیم

تحقیق و امتحان $6a^2bc^3 = 2abc^2 \times 3ac$

مثال دوم $8a^4b^2cd : 3a^5bc^2d$

خارج قسمت $\frac{8b}{3ac} = \frac{8a^4b^2cd}{3a^5bc^2d} = \frac{8a^4bbcd}{3a^4abccd}$

امتحان $8a^4b^2cd = \frac{24a^5b^2c^2d}{3ac} = 3a^5bc^2d \times \frac{8b}{3ac}$

مثال سیم $12a^3b^4c^5 : -6a^2b^3c^2$

خارج قسمت $-2abc^3$

$$\frac{12a^3b^4c^5}{-6a^2b^3c^2} = -2abc^3$$

تحقیق $12a^3b^4c^5 = -6a^2b^3c^2 \times -2abc^3$

مثال چهارم $-12a^3b^4c^5 : 6a^2b^3c^2$

خارج قسمت $\frac{-12a^3b^4c^5}{6a^2b^3c^2} = -2abc^3$

مثال پنجم $-6a^2bc^4 : -2abc^2$

خارج قسمت $\frac{-6a^2bc^3}{-2abc^2} = 3ac$

از روی این مثالهای مختلف قاعدهٔ ذیل استنباط میشود

۳۹- قاعده - در تحصیل خارج قسمت مونمی بر مونم دیگر همین قدر کافی است کسری ترتیب دهیم که صورتش مقسوم باشد و مخرجش مقسوم علیه و بعد عاملهای مشترک در دو جمله این کسر را حذف کنیم تا خارج قسمت ساده بدست آید و آنوقت اگر مقسوم و مقسوم علیه یک علامت باشند علامت خارج قسمت بعلاوه است و اگر علامت آنها مختلف باشد علامت خارج قسمت منها است

تنبیه ۱ - از روی چند مثال فوق این فقره معلوم میشود که به تغییر دادن تمام علامات مقسوم و مقسوم علیه در خارج قسمت تغییری عارض نمیشود

تنبیه ۲ - به تغییر دادن علامات مقسوم یا مقسوم علیه تنها علامت خارج قسمت تغییر میکند

تنبیه ۳ - معنی مفتسر صفر - موافق آنچه بالا ذکر شد خارج قسمت س^5 بر س^3 میشود س^2 یا بصورت $\frac{\text{س}^5}{\text{س}^3} = \frac{\text{س}^3 \times \text{س}^2}{\text{س}^3} = \text{س}^2$ (این نکته زود معلوم میشود که خارج قسمت س^2 بهمین راه زودتر معلوم میشود که مفتسر مقسوم علیه را از مفتسر مقسوم موضوع کنیم) و خارج قسمت س^3 بر س^3 چنین میشود $\frac{\text{س}^3}{\text{س}^3} = \text{س}^{3-3} = \text{س}^0 = 1$ (چراکه هر مقدار را چون بر نفس خود قسمت کنند خارج میشود ۱) پس چنین نتیجه شد که

هر مقداری که مفترش صفر شد برابر واحد میشود

مثلا $\frac{a^4 b^5}{a^4 b^5} = a^0 b^0 = 1$

تنبیه ٤ — معنی مفتر منفی — خارج قسمت a^3 بر a^5 چنین میشود

$$\frac{a^3}{a^5} = \frac{a^3}{a^3 \times a^2} = \frac{1}{a^2} = a^{3-5} = a^{-2}$$

پس هر مقدار که صاحب مفتر منفی است معادل باشد با کسری که صورتش واحد است و مخرجش همین مقدار مذکور باشد با همان مفتر اما مثبت

مثال $\frac{a^3 b^5}{a^6 b^7} = a^{-3} b^{-2} = \frac{1}{a^3 b^2}$

٤٠ — در تقسیم پولینومی بر مونم — قاعدهٔ تحصیل خارج قسمت باین است که تمام پولینوم یا هر یك از جمله هایش را قسمت کنیم بر مونم

مثلا خارج قسمت a^2+ab-b بر a چنین میشود

$\frac{a^2+ab-b}{a}$ یا $\frac{a^2}{a} + \frac{ab}{a} - \frac{b}{a} = a+b-\frac{b}{a}$

وصحت این نتیجه بسهولت معلوم میشود

٤١ — در قسمت پولینوم بر پولینوم — قاعده اینست که جملهای مقسوم و مقسوم علیه را هر دو بترتیب قوای متزایده یا متناقصهٔ يك حرف بنویسیم (در اینصورت گویند که هر دو پولینوم نسبت بیك حرف منظم اند) وبعد موافق قاعدهٔ تقسیم مونم قسمت کنیم جملهٔ اول

مقسوم را

مقسوم را بر جملهٔ اوّل مقسوم علیه تا جملهٔ اوّل خارج قسمت بدست آید و حاصل ضرب تمام مقسوم علیه را در این جمله تفریق کنیم از مقسوم (و در تفریق این حاصل ضرب همین قدر کافی است که وقت نوشتن علامات آنرا تغییر دهیم و تحویل نمائیم) و بعد جملهٔ اوّل باقی را قسمت کنیم بر جملهٔ اوّل مقسوم علیه تا جملهٔ دوم خارج قسمت بدست آید و از باقی اوّل تفریق کنیم حاصل تمام مقسوم علیه را در این جمله و بهمین دستور پیش میرویم تا جملهٔ آخر خارج قسمت بدست آید امثله

مثال اوّل میخواهیم قسمت کنیم $a^2 - 2ab + b^2$ را بر $a - b$ و موافق دستور فوق چنین مینویسیم

$a^2 - 2ab + b^2$	$a - b$
$-a^2 + ab$	$a - b$
$-ab + b^2$	
$ab - b^2$	
0	

مثال دوم میخواهیم قسمت کنیم $a^2 - b^2$ را بر $a + b$

$a^2 - b^2$	$a + b$
$-a^2 - ab$	$a - b$
$-ab - b^2$	
$+ab + b^2$	
0	

مثال سیم

$$a^3+3a^2+3a+1 : a+1$$

$$\begin{array}{r|l} a^3+3a^2+3a+1 & a+1 \\ \cline{2-2} -a^3-a^2 & a^2+2a+1 \\ \hline 2a^2+3a+1 & \\ -2a^2-2a & \\ \hline a+1 & \\ -a-1 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

مثال چهارم

$$a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5$$

$$: a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$$

$$\begin{array}{r|l} a^5-5a^4b+10a^3b^2-10a^2b^3+5ab^4-b^5 & a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \\ \cline{2-2} a^5+3a^4b-3a^3b^2+a^2b^3 & a^2-2ab+b^2 \\ \hline -2a^4b+7a^3b^2-9a^2b^3+5ab^4-b^5 & \text{باقی اول} \\ +2a^4b-6a^3b^2+6a^2b^3-2ab^4 & \\ \hline a^3b^2-3a^2b^3+3ab^4-b^5 & \text{باقی دوم} \\ -a^3b^2+3a^2b^3-3ab^4+b^5 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

۴۲ — این چند مثال کافی باشد برای راهنمائی در تقسیم پولینوم علاوه بران باندک تفکر معلوم میشود که روش عمل قسمت در حساب و جبر و مقابله یکی است

۴۳ — هرگاه خارج قسمت دو پولینوم درست و بدون باقی درنیاید

باید این خارج قسمت را بصورت کسر نوشت و در صورت امکان مختصرش نمود و گاه در پولینومهائی که خارج قسمت صحیح هم داشته باشند چنین میکنند و بعد از اختصار همین کسر آن خارج قسمت مطلوب صحیح بدست میاید

امثله

مثال اول - میخواهیم a^2+ab+b^2 را بر $a+b$ قسمت کنیم

خارج قسمت این است $\frac{a^2+ab+b^2}{a+b}$ یا نیز

$$\frac{a^2}{a+b}+\frac{ab}{a+b}+\frac{b^2}{a+b}$$

مثال دوم $a^2b-a : ab^2+a$

خارج قسمت اینست $\frac{a^2b-a}{ab^2+a}=\frac{a(ab-1)}{a(b^2+1)}=\frac{ab-1}{b^2+1}$

مثال سیم $a^2-b^2 : a+b$

خارج قسمت $\frac{a^2-b^2}{a+b}=\frac{(a+b)(a-b)}{a+b}=a-b$

مثال چهارم $a^2-1 : a-1$

خارج قسمت $\frac{a^2-1}{a-1}=\frac{(a+1)(a-1)}{a-1}=a+1$

امثله و مسائل چند در قسمت

۴۶ - قسمت کنید $4a^5b^3$ را بر ab^2

۴۷ - طلب کنید خارج قسمت $24a^3b^5c^2$ را بر $-3ab^2$

۴۸ - قسمت کنید $24a^3b^5c^2$ را بر $3ab^2$

۴۹ — چیست [illegible] ۳ [illegible] —

۵۰ — [illegible] ساده ومختصر شود

۵۱ — این تعبیر را [illegible] بتعبیر معادل اش تبدیل کنید

۵۲ — اینکه معادل [illegible] چیست

۵۳ — [illegible] $-۳ =$

۵۴ — $\frac{1}{ج^{۳}} =$

۵۵ — $\frac{ا^{۰} + ب^{۰} + ج^{۰}}{۳} =$

۵۶ — این مقدار را معلوم کنید چیست [illegible]

۵۷ — این دستور نسبت بدایره چه معنی دارد $ق = \frac{م}{\pi}$

۵۸ — هرگاه در این دستور $ق = \frac{م}{\pi}$ فرض کنیم [illegible] $= C$ مقدار [illegible] چه قدر میشود

۵۹ — این دستور را $R = \frac{C}{2\pi}$ چون در دایره جاری کنیم چه [illegible] معنی میکنید

۶۰ — در این دستور $R = \frac{C}{2\pi}$ چون فرض کنیم [illegible] مقدار R چه میشود

۶۱ — این دستور $H = \frac{V}{\pi R^{2}}$ را چون در استوانه جاری کنیم بچه معنی باشد

۶۲ - در این دستور $H = \frac{V}{\pi R^2}$ چون فرض کنیم $V = ۱$ متر مکعب و $R = ۰٫۲۵$ مقدار H چه میشود

۶۳ - خارج قسمت سطح کره بر ۴π بچه شکل تغییر میشود

۶۴ - حجم کره این است $\frac{۴\pi R^3}{۳}$ پس چه شکل میشود خارج قسمت $۳V$ بر ۴π (بنابرانکه V علامت حجم کره باشد)

۶۵ - معلوم کنید ارتفاع H از مستطیل P را بنابرانکه بدانیم قاعده‌اش B مساویست با ۲۰٫۱۰۸ متر و سطحش ۵۴۴۲٫۴۶ متر مربع

۶۶ - ما را بدست دهید قاعدهٔ کلیهٔ در یافتن ارتفاع H یا قاعدهٔ B از مستطیل P بنابرانکه وسعت سطح و یکی از دو بعد آن H یا B معلوم باشد

۶۷ - در مثلث T وسعت سطح ۷۲۰ ذرع مربع است و ارتفاعش ۳۰ ذرع مطلوب است اندازهٔ قاعده‌اش B

۶۸ - قاعدهٔ کلیه در دست دهید که هرگاه در مثلثی مساحتش T و یکی از دو بعدش H و B در دست باشد بعد دیگر را چگونه باید معلوم کرد

۶۹ - خارج قسمت a^m بر a^n چه میشود

۷۰ - مقدار این کسر $\frac{a^2(a^2 - b^2)}{b^2(a - b)}$ چه میشود بنابرانکه $b = a$ فرض کنیم

کسور

کسور جبری

۴۴ — آنچه در علم حساب در خصوص کسور متعارفه گفته ایم و فهمیده اید تماماً تعلق میگیرد بکسور جبری پس تکرار آن لازم نیست

فصل ششم

در معادلات

تعریفات

۴۵ — تساوی — و آن بطور کلی تشکیل تعادل دو مقدار است اما غالباً عادت براین جاری شده که کلمهٔ تساوی را وقتی استعمال کنند که در آن دو مقدار مجهولی نباشد و یا یکی از آن دو مقدار نتیجه و حاصل اعمالی باشد که در مقدار دیگر باید جاری شود

مثلاً

$$۷ + ۵ = ۱۴ - ۲$$

و

$$(x+1)x = x^2 + x$$

این هردو را مخصوصاً تساوی گوئیم نه معادله

۴۶ — اتحاد — و آن عبارت است از تساوی واضحی مثل ۵ = ۵ و

$$a + b = a + b$$

۴۷ — معادله — و آن عبارت است از یک تساوی که دارای یک مجهول یا چند مجهول باشد

مثلاً

مثلا $7x + 4 = 24 - 6$

و $8x + 3 = 22 + x$ را معادله گوئیم

تنبیه - این امتیازی که قرار دادیم چندان اهمیتی ندارد و بسیار میشود که معادله و تساوی را بجای هم استعمال کنند

۸۴ - هر تساوی صاحب دو عضو است

عضو اول عبارت است از مجموع مقادیری که در طرف چپ علامت = افتاده اند و عضو دوم مجموعهٔ مقادیریست که در طرف راست علامت افتاده اند (معادله بر دو قسم است عددی و حرفی عددی وقتی است که مقادیر معلومه بعدد ذکر شده باشند و حرفی وقتیست که بحروف معین شده باشند)

در معادله جمله آن مقداریست که از سایر جدا و ممتاز شده باشد بعلامت + یا − در این معادله

$$14 + 2x = 20 - x + 12$$

عضو اول صاحب دو جمله است و عضو دوم صاحب سه جمله

و در این معادله دیگر $x = 5 - \frac{8+3x}{2}$

عضو اول بیک لحاظ نیز صاحب دو جمله است چرا که تعبیر $\frac{8+3x}{2}$ معادل است با این تعبیر $\frac{1}{2}(8+3x)$ که یک جمله محسوب میشود

چونکه در مقدار (س + ۳ + ۸ / ۲) بعلامت + و − از هم جدا نشده اما بلحاظ دیگر صاحب سه جمله است چرا که تعبیر (س + ۳ + ۸) / ۲ را بعنوان مجزی نمود باینصورت دو جمله (س + ۳) / ۲ + ۸ / ۲ که بعلامت + از هم جدا شده اند و با جمله ۵ سه جمله میشود

۴۹ — معادلات را از روی درجات تقسیم نموده اند

۵۰ — معادله درجهٔ اول آنست که مجهولش نه در نفس خود ضرب شده باشد نه در مجهول دیگر و اگر در معادله مجهول ضرب شده باشد در نفس خود یا در مجهول دیگر آنرا یکدرجه بالاتر از اولی محسوب دارند و بطور کلی درجهٔ معادله عبارت است از مجموع مضربهای مجهولات در جمله که در آنجا این جمع بزرگتر از جمع در سایر جمله ها باشد

مثلا این معادله   س^۳ ع + س^۲ = ۲۰

از درجهٔ چهارم است چونکه مضربها در جملهٔ اول س^۳ ع است ۳ و ۱ و مجموعشان میشود ۴

و این تساوی   ع س − ۴ س − ۵ ن = ۲۵

از درجهٔ دوم است چونکه مضربهای جمله ع س میباشند ۱ و ۱

۵۱ — حل نمودن معادلات عبارت است از یافتن مقادیر مجهولاتی که در آنها مندرج شده و چون یافتیم و در معادلات بجای مجهولات گذاشتیم

واعمال

واعمال معینه را بجا آوردیم آن معادلات هر کدامی منجر میشود بحالت اتحاد

مثلاً حل نمودن این معادله ۴ش + ش/۳ = ۲۶ عبارت است

از یافتن مقدار ش بر وجهیکه در معادله قرارش دهیم واعمال را مجری داریم

دو عضو متحد شوند

۵۲ - شخص چون خواهد استعداد حل مسائل را بطریق جبر حاصل نماید باید

اول بداند راه نقل وگذاشتن مسائل را بمعادلات

ودوم بداند راه حل نمودن این معادلات را

وچون آموختن جزو اخیر آسان تر است ما مقدم داریم و بپردازیم بهمین فرض

فصل هفتم

در حل معادلات درجهٔ اول یک مجهولی

۵۳ - بنای حل معادلات بر این دو فقره ذیل از علوم متعارفه است

اول چون دو مقدار متساوی را بیک چیز بیفزائیم یا بکاهیم از حالت

تساوی خارج نمیشوند

دوم دو مقدار متساوی را چون در یک ضرب کنیم یا بر آن چیز

قسمت کنیم از حالت تساوی خارج نشوند

۵۴ - از لزومات این اصل آنکه

اولاً - میتوان جمله را از یک عضو معادله محو نمود بشرط آنکه

در عضو دیگری نقلش کنیم و بنویسیم با علامت مخالفی و این عمل را جبر گوییم و باین تصرف معادل از تعادل نیافتد چونکه هر دو عضو را چیزی معین افزوده شده یا کاسته

مثلا در این معادله ۵ش − ۴ = ۱۰ + ۳ش

میخواهیم جمله ۳ش + را نقل کنیم در عضو اول پس آن را از عضو دوم محو میکنیم و مینویسیمش در عضو اول با علامت مخالف بصورت ذیل و این عمل را مقابله گویند و آن باین معنی است که جمله مثبتی در دو طرف مشترک باشد محوش کنند ۵ش − ۴ − ۳ش = ۱۰

و باندک تاملی میفهمید که این معادلهٔ جدید بعینه همان اولی است که از دو عضوش ش۳ کاسته شد و چون از عضو اول جمله ۴− را بیرون کنیم بهمان دستور چنین میشود و این عمل را جبر گوییم و آن باین معنی است که جملهٔ منفی را از طرفی نقل کنند بطرف دیگر تا مثبت شود.

۵ش − ۳ش = ۱۰ + ۴

و این همان معادلهٔ سابق است که بر دو عضوش ۴ افزوده شده و تحقیقش آسان است ۵ش − ۴ + ۴ − ۳ش = ۱۰ + ۴

و اینجا ۴+ و ۴− تکافؤ میکنند و باقی میماند

۵ش − ۳ش = ۱۰ + ۴

ثانیاً - میتوان علامات جمیع جمله های معادله را تغییر داد بی آنکه تعادل

مثلا این معادله را $4x - 8 = 14 - 2x$

میتوان چنین نوشت $-4x + 8 = -14 + 2x$

چراکه اگر در این معادله مفروضه جمله های عضو اول را نقل کنیم در دوم و دوم را

در اول چنین میشود $-14 + 2x = -4x + 8$

و چون بدون تصرف جای دو عضو را عوض کنیم چنین میشود

$$-4x + 8 = -14 + 2x$$

ثالثاً - میتوان دو معادله را عضو بعضو بر هم افزود یا یکی را از

دیگری کاست بی آنکه از حالت تعادل خارج شوند

چراکه معناً با این عمل بر دو عضو معادله یک چیز افزوده ایم یا کاسته ایم

۵۵ - و بعنوان ملزومات اصل دوم قاعده سهلی استنباط کنیم در رفع و علاج

کسوری که گاه در معادله پیدا میشود اینست که این کسور را بیک مخرج تحویل

کنیم و مخرج مشترک را در کسور محو کنیم و سایر جمله ها را ضرب کنیم در آن

مثلا در این معادله : $x - \frac{1}{2} = \frac{2x}{3} - \frac{x}{5} + 1$

چون کسور را بیک مخرج تحویل کنیم چنین میشود

$$x - \frac{15}{30} = \frac{20x}{30} - \frac{6x}{30} + 1$$

و حال چون مخرج ۳۰ را محو کنیم و دو جمله دیگر را در آن ضرب کنیم را هم میشود

باین

این معادلهٔ جدید

$$30x - 15 = 10x - 6x + 30$$

که هیچ وجه کسری ندارد و ظاهر است که این همان معادله مفروض است که جمیع جمله هایش را ضرب نموده ایم در ۳۰

۵۶ – بنا بر آنچه تا اینجا شرح دادیم میتوانیم قاعدهٔ کلیه بدست دهیم برای حل معادلات درجهٔ اوّل یک مجهولی

قاعده – در حل معادله درجهٔ اوّل با یک مجهول اینست که اوّلا اگر کسوری داشته باشد بیک مخرج تحویل کنیم و آن مخرج را از کسور بردارند و سایر جمله ها را در آن مخرج ضرب کنیم و ثانیاً جمله های معلوم را در عضو دوم معادله نقل کنیم و جمله های مجهول را در عضو اوّل و ثالثاً تمام عضو دوم را بر معتبر مجهول قسمت کنیم

۵۷ – حال دستور مذکور را در طی چند مثال جاری میکنیم

مثلاً این معادله $\frac{7x}{3} + 14 = x + 18$

و ضرب جمیع جمله ها در ۳ چنین میشود

$$7x + 42 = 3x + 54$$

و چون $3x$ را در عضو اوّل نقل کنیم و ۴۲ را در عضو دوم چنین میشود

$$7x - 3x = 54 - 42$$

و از اینجا

و از آنجا $۴x = ۱۲$

و چون دو عضو این معادلهٔ اخیر را بر ۴ قسمت کنیم چنین میشود

$$x = ۳$$

۵۸ - در ضمن حل معادله باید همواره محاسبات را بقدری که ممکن است ساده و مختصر نمائیم و نظر بهمین نکته است که قبل از اجرای دستور ۵۷ نایش رفت دارد و معادله را ساده مینمایند

چنانچه در این معادله $\frac{۴x}{۳} - \frac{x}{۲} + ۱۵ = ۲۷ - \frac{۷x}{۶}$

و اول ۱۵ را از دو عضو ساقط مینمایند تا چنین شود

$$\frac{۴x}{۳} - \frac{x}{۲} = ۱۲ - \frac{۷x}{۶}$$

و چون اینجا عدد ۶ را بعنوان مخرج مشترک قرار دادیم هر دو جملهٔ کسر $\frac{۴x}{۳}$ را ضرب میکنیم در ۲ و دو جملهٔ کسر $\frac{x}{۲}$ را در ۳ تا چنین شود

$$\frac{۸x}{۶} - \frac{۳x}{۶} = ۱۲ - \frac{۷x}{۶}$$

و چون مخرج ۶ را خارج کنیم چنین شود

$$۸x - ۳x = ۷۲ - ۷x$$

و چون جملهٔ $-۷x$ را بطرف دیگر نقل کنیم و تقلیلات لازمه را بعمل آوریم

چنین میشود $۱۲x = ۷۲$

و بنابراین $x = ۶$

۵۹ — حال میخواهیم این معادلهٔ عددی را نیز حل کنیم

(۱) $\frac{x+۴}{۳} - \frac{۳x-۱۸}{۵} + ۵٫۶ = ۳x+۴$

و چون ۴ را از دو عضو این معادله ساقط نمائیم چنین میشود

(۲) $\frac{x+۴}{۳} - \frac{۳x-۱۸}{۵} + ۱٫۶ = ۳x$

و چون کسور را بیک مخرج تحویل کنیم چنین میشود

(۳) $\frac{۵x+۲۰}{۱۵} - \frac{۹x-۵۴}{۱۵} + ۱٫۶ = ۳x$

و چون جملهٔ $\frac{۹x-۵۴}{۱۵}-$ را در عضو دوم نقل کنیم چنین شود

(۴) $\frac{۵x+۲۰}{۱۵} + ۱٫۶ = ۳x + \frac{۹x-۵۴}{۱۵}$

و چون جمیع جملها را در ۱۵ ضرب کنیم چنین میشود

(۵) $۵x + ۲۰ + ۲۴ = ۴۵x + ۹x - ۵۴$

و بعد از نقل مقادیر مجهوله در عضو اول و مقادیر معلومه در عضو دوم و تحویلات لازمه چنین میشود $-۴۹x = -۹۸$

و بعد از تغییر علامات (۵۴ ثانیاً) چنین میشود

$$۴۹x = ۹۸$$

و بعد $x = ۲$

و چون مقدار مجهول را در معادلهٔ (۱) گذاریم دفعتاً میدهد

(۶) $\frac{۲+۴}{۳} - \frac{۶-۱۸}{۵} + ۵٫۶ = ۶+۴$

$$(۷) \quad ۲ - \frac{۶-۱۸}{۵} + ۵٫۶ = ۱۰$$ یا

وچون جمله $\frac{۶-۱۸}{۵}$ ـ را بعضو دوم نقل کنیم چنین میشود

$$۲ + ۵٫۶ = ۱۰ + \frac{۶-۱۸}{۵}$$

حال چون جمیع جمله ها را در ۵ ضرب کنیم و تحویل نمائیم اتحاد دست میدهد

باین شکل $$۳۸ = ۳۸$$

وعدد ۲ تنها مقداریست که بتواند در معادلهٔ (۱) صدق کند چنانچه نسبت

توان ملتفت شد پس جواب واقعی منحصر است در همان تنها

تنبیه ـ ما نظر بانکه شاگردان مبتدی مطلب را بهتر بفهمند جمله

$\frac{۹x-۵۴}{۱۵}$ ـ را از عضو اول حرکت دادیم بعضو دوم تا معادلهٔ

(۴) بدست آید اما وقت عمل این قاعده مجری نیست و راه معمولی که بهمان

بهمان نتیجه رساند اینست که علامت ـ مقدم بر کسر $\frac{x-۵۴}{۱۵}$

باین معنی است که باید این کسر را از مقدم خود تفریق نمود و این تفریق

موقوف است بهمین که علامات مقادیر مؤلفه صورت را تغییر دهیم و آنوقت

در واقع خارج قسمتی که این کسر نمایندهٔ اوست علامتش تغییر نموده (۳۹) تغییر

و بنابراین تفریق شده است از جملهٔ ماقبل خود ۱۸

وچون بهمین دستور در معادلهٔ (۳) پیش رویم و جمیع جمله های آنرا

در ۱۵ ضرب کنیم چنین میشود

۵ س + ۳۰ − ۹ س + ۵۴ + ۲۴ = ۴۵ س

ومعادلهٔ (۵) بهمین شکل در می آید بعد ازانکه دو جملهٔ بهم ۹ + و ۵۴− را از عضو دوم نقل کنیم بعضو اول

ودر عمل تساوی (۷) میتوانستیم بهمین طریق پیش رویم یعنی عوض نقل جمله $\frac{۱۸−۶}{۵}$ − جمیع جمله ها را ضرب میکردیم در ۵ وعلامات صورت کسر را تغییر میدادیم تا چنین میشد

۱۰ − ۶ + ۱۸ + ۲۸ = ۵۰

وبعد از تحویلات چنین ۵۰ = ۵۰

واگر میخواستیم همان اتحاد سابق الذکر بدست آید یعنی ۳۸ = ۳۸ همین قدر کافی بود که دو جملهٔ ۶ − و ۱۸ + را نقل کنیم در عضو دوم مثالی را که تا اینجا مشغول حل آن بودیم خالی از اهمیت نیست شاگردان را که دران خیلی دقت وتفکر نمایند

۶۰ − حالا چند معادلهٔ حروفی حل میکنیم

مثال اول در این معادله

س س + بم = ک

چون جملهٔ بم + را بطرف دیگر نقل کنیم چنین میشود

س س = ک − بم

وچون بردو عضو را بر a قسمت کنیم چنین میشود

$$x = \frac{d - nb}{a}$$

واین جواب در آن معادله وفق میدهد چرا که بعد از گذاشتن بجای مجهول چنین میشود $d = nb + \frac{a(d - nb)}{a}$

یا $d = nb + d - nb$

دو جمله nb - و nb + یکدیگر را محو میکنند و آنوقت این اتحاد بدست آید

$$d = d$$

مقداری که برای x بدست آوردیم تنها جوابی است که در آن معادله صدق کند و منحصر بهمان.

۴۱ - مثال ۲ - میخواهیم این معادله را حل کنیم

$$ax + bx = a^2 - b^2$$

وچون x را بعامل مشترک گذاریم چنین میشود

$$x(a + b) = a^2 - b^2$$

وچون دو عضو را بر $a + b$ قسمت کنیم چنین میشود

$$x = \frac{a^2 - b^2}{a + b}$$

اما بنا بر ۳۳ مثال ۳ $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

پس بعد از تبدیل بینوم $a^2 - b^2$ بمقدار معادل خود چنین میشود

$(a - b)$

$$x = \frac{(a+b)(a-b)}{a+b}$$

و خلاصه $x = a - b$

چراکه هردو جملهٔ کسر قابل قسمت باشند بر $a + b$

۶۲ - مثال ۳ - میخواهیم این معادله را حل کنیم

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = c$$

و بعد از تحویل کسور بیک مخرج چنین میشود

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ax}{ab} = c$$

(این تحویل در جبر و مقابله بهمان قاعده که در حساب ذکر شده باید بعمل آید یعنی اگر دو کسر داشته باشیم هر دو جملهٔ کسر اوّل را ضرب میکنیم در مخرج دوّم و بر عکس آن و اگر عدد کسور بیشتر باشد دو جملهٔ هر کدام را ضرب میکنیم در حاصل ضرب سایر مخارج)

و چون هر دو عضو را ضرب کنیم در ab چنین میشود

$$bx + ax = abc$$

و چون x را بعامل مشترک گذاریم چنین میشود

$$x(a+b) = abc$$

و چون هر دو عضو را بر $a + b$ قسمت کنیم چنین میشود

$$x = \frac{abc}{a+b}$$

امثلهٔ مشق

میخواهیم این چند معادله را حل کنیم

$3x - 16 = 2$ ‎ -۷۱

$4x + 5 = 15 - x$ ‎ -۷۲

$\frac{5x+6}{3} - 2 = 5$ ‎ -۷۳

$\frac{6x-5}{2} = x - \frac{1}{2}$ ‎ -۷۴

$\frac{2(x-3)}{7} + 4 - x = 3x - 34$ ‎ -۷۵

$\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + x = 19$ ‎ -۷۶

$\frac{5x}{3} + \frac{x}{2} - 4x + 18 = -4$ ‎ -۷۷

$\frac{25x}{7} + \frac{3x}{9} + 4 = \frac{17}{21} + 3x - 2$ ‎ -۷۸

$ax - b = c$ ‎ -۷۹

$ax - bx = d$ ‎ -۸۰

$\frac{ax - bx}{2} + d = c - e$ ‎ -۸۱

$\frac{a+b}{x} - d = 1$ ‎ -۸۲

$\frac{a-b}{2x} - 1 = c - 3$ ‎ -۸۳

$\frac{c+b}{3x} - \frac{d}{x} = a - 4$ ‎ ۸۴

فصل هشتم

دستور نقل مسئله بصورت معادله و آنرا گذاشتن مسئله بمعادله گوییم

٤٣ - بسیار اتفاق میافتد که گذاشتن مسئله بمعادله هیچ اشکال ندارد و حال آنکه بعضی اوقات نمیتوان چنین بسهل بمقصود رسید بلکه مدت زیاد باید فکر کرد و بدقت رسیدگی و موازنه نمود جمیع روابطی را که میان مفروضات مسئله ممکن است تحقق پیدا کند تا از آن میان معادله تشکیل شود اینجا دستور العملی بیان میکنیم برای گذاشتن هر مسئله بمعادله

دستور العمل — هر مقداری که مجهول است بحرفی بنمائید و بعد بمدد علامات جبری مجری دارید در آن حروف و در معلومات مسئله جمیع محاسبات و جمیع اعمالی را که مناسبت مجری دارید اگر بخواهید در مقام تحقیق و امتحان جوابهای آن مقادیر مجهوله بعمل آورید تا بفهمید که آیا آن اعداد در جواب مسئله وفق میدهند یا خیر و نظر بآنکه شاگردان فائده این دستور العمل را بهتر فرا گیرند و بکار اندازند در حل چند مسئله مجری میداریم

در حل چند مسئله از درجه اول با یک مجهول

٤٤ - مسئله اول - عددی میخواهیم که چون بر $\frac{1}{4}$ آن ۲۰ واحد بیفزائیم حاصل برابر شود با ٤٥ منهای مضاعف آن عدد

پس.

پس آن عدد را x فرض میکنیم و ربع آن میشود $\frac{x}{4}$ و چون ۲۰ بر آن بیفزائیم میشود $20 + \frac{x}{4}$ اما موافق بیان مسئله باید این $20 + \frac{x}{4}$ برابر شود با ۵۶ منهای دو برابر عدد مطلوب یعنی منهای $2x$ پس این معادله ترکیب شود

$$\frac{x}{4} + 20 = 56 - 2x$$

و چون موافق دستور العملی که در حل معادله گفته ایم پیش رویم بترتیب این چند تساوی حاصل شود

$$\frac{x}{4} = 56 - 20 - 2x$$

$$\frac{x}{4} = 36 - 2x$$

$$x = 144 - 8x$$

$$9x = 144$$

$$x = \frac{144}{9} = 16$$

پس عدد مطلوب ۱۶ است چرا که اگر عدد ۲۰ را بر ربع این عدد بیفزائیم میشود ۲۴ و آن مساوی است با ۵۶ منهای دو برابر ۱۶

۴۵ - مسئله ۲ - مجموع دو عدد ۴۸ است و تفاضل آنها ۱۴ مطلوب است آن دو عدد

چون یکی از آن دو عدد مثلا کوچکتر را x فرض کنیم بزرگتر میشود عدد مجموع

منهای کوچکتر یعنی $۴۸ - x$ وچون دو عدد باشند x $۴۸ - x$ و x تفاضل شان میشود $۴۸ - x - x$ یا $۴۸ - ۲x$ اما موافق بیان مسئله این تفاضل میشود ۱۴ پس

$$۴۸ - ۲x = ۱۴$$

$$-۲x = ۱۴ - ۴۸$$

وبعد از تبدیل علامات

$$۲x = ۴۸ - ۱۴$$

$$۲x = ۳۴$$

$$x = ۱۷$$

وعدد دیگر میشود $۴۸ - ۱۷$ یا ۳۱

مسئلهٔ سیم - دو کالسکهٔ چاپاری با راه آهن از پاریس و مارسی در آنِ واحد بسمت همدیگر حرکت کردند میخواهیم بدانیم بعد از چند ساعت بهمدیگر میرسند بنا بر آنکه بدانیم کالسکهٔ پاریس ساعتی ۴۴٫۲ کیلومتر طی میکند و کالسکهٔ مارسی ساعتی ۴۲ کیلومتر و فاصلهٔ ما بین این دو شهر ۸۶۲ کیلومتر است

جواب - فرض کنیم x عدد ساعات مطلوب باشد پس کالسکهٔ

پاریس

پارسیس که ساعتی ۴۴٫۲ کیلو طی میکند در x ساعت مسافتی بپیماید
x ۴۴٫۲ و در همان مدت کالسکه مارسیل طی میکند x ۴۲ و مجموع
دو مسافتی که در مدت x این دو کالسکه میپیماید برابر میشود با فاصله مابین دو شهر

پس

$$44{,}2x + 42x = 862$$

$$86{,}2x = 862$$

$$x = 10$$

از این قرار دو کالسکه بعد از راه افتادن بده ساعت فاصله بهمدیگر میرسند
و کالسکه پاریس در اینمدت ده برابر ۴۴٫۲ کیلو طی نموده یعنی ۴۴۲ کیلو
و کالسکهٔ مارسیلی ا برابر ۴۲ کیلو یعنی ۴۲۰ کیلو و مجموع این دو عدد
۴۲۰ + ۴۴۲ یعنی ۸۶۲ کیلو فاصله مابین دو شهر است

۴۷ مسئله ۴ — دو چشمه در یک استخری جاری میشوند اولی
تنها آنرا در ۵ ساعت پر میکند و دومی تنها در ۷ ساعت و حالا
میخواهیم بدانیم که اگر با همدیگر جاری شوند استخر در چند ساعت
پر میکنند

جواب — چون گنجایش استخر معین نشده ما آنرا ۱ فرض میکنیم و زمان
مطلوب را x و چشمهٔ اولی گنجایش ۱ را در ۵ ساعت پر میکند و در یک ساعت
$\frac{1}{5}$ ظرف را و در x ساعت برابر $\frac{1}{5}$ یعنی $\frac{x}{5}$ و همچنین چشمهٔ دوم در یک

ساعت

ساعت $\frac{۱}{۷}$ ظرف را و در x ساعت $\frac{x}{۷}$ آنرا اما دو چشمه چون باتفاق جاری شوند تمام آنرا در مدت x پر میکنند پس این معادله حاصل شود

$$\frac{x}{۵} + \frac{x}{۷} = ۱$$

$$\frac{۷x}{۳۵} + \frac{۵x}{۳۵} = ۱$$

$$۷x + ۵x = ۳۵$$

$$۱۲x = ۳۵$$

$$x = \frac{۳۵}{۱۲} = \overset{\text{ع}}{۲} \; \overset{\text{ه}}{۵۵}$$

پس معلوم شد که چون باتفاق جاری شوند تمام آنرا در مدت $\overset{\text{ع}}{۲}$ $\overset{\text{ه}}{۵۵}$ پر میکنند

۶۸- مسئله‌ی ۵ - پدری امروز بسن ۴۵ است پسرش بسن ۱۵ میخواهیم بدانیم چند سال قبل سن پسر $\frac{۱}{۴}$ سن پدر بوده

جواب- عدد سالهای مطلوب را x فرض میکنیم پس در آن سال سن پدر بوده $۴۵ - x$ و سن پسر $۱۵ - x$ اما در آن سال سن پسر بوده است برابر بکربع سن پدر پس این معادله حاصل شود

$$\frac{۴۵ - x}{۴} = ۱۵ - x$$

$$۴۵ - x = ۶۰ - ۴x$$

$$۴x - x = ۶۰ - ۴۵$$

$$۳x = ۱۵$$

$$x = ۵$$

پس

پس در ۵ سال ثلث سن پدر بوده است ۴۵ منهای ۵ یعنی ۴۰ و ثلث پسر ۵ ا منهای ۵ یعنی ۱۰ و عدد ده درست یکربع ۴۰ است

۶ .- مسئله ۶ - دو کالسکه از طهران بسمت تبریز حرکت کردند اوّلی ساعتی ۴ میل راه میرود دوّمی ساعتی ۱۰ میل و مطلوب اینست که در چه فاصله از طهران دوّمی باوّلی میرسد بنابرآنکه ۳ ساعت بعد از اوّلی حرکت کرده باشد.

جواب - فاصله مطلوبه را س فرض میکنیم و آن فاصله است که دوّمی طی میکند قبل از رسیدن باوّلی در مدتی که دوّمی س میل طی نموده اوّلی طی کرده است س منهای آن ۱۲ میلی را که اوّلی از حرکت دوّمی در ۳ ساعت پیموده بود و از این قرار دو فاصله ۱۲ - س و س در یک مدت طی شده و منظور ما یافتن آن مدت است پس کالسکه اوّل که در هر ساعتی ۴ میل طی میکند ساعات سیرش مسافت ۱۲ - س را برابر است با عدّهٔ مرّاتی که عدد ۴ در این فاصله میگنجد و کذا کالسکه دوم عدّهٔ ساعات سیرش در مسافت س برابر است با مرّات گنجایش ۱۰ در س و بنابراین این معادله حاصل شود

$$\frac{س - ۱۲}{۴} = \frac{س}{۱۰}$$

و چون مخرج مشترک را ۲۰ بگیریم چنین میشود

$$\frac{۵س - ۶۰}{۲۰} = \frac{۲س}{۲۰}$$

$$5x - 60 = 3x$$

$$5x - 3x = 60$$

$$2x = 60$$

$$x = 30$$

وبنابراین کالسکهٔ دوتم در فاصلهٔ ۳۰ میلی از مبدء میرسد بدوم وچون درهر ساعت ۱۰ میل راه میرود در ۳ ساعت طی ۳۰ میل راه میکند وراهی که اوّلی پیموده نیز ۳۰ میل است چراکه ۱۲ میل قبل از دومی بوده و ۱۸ میل درظرف ۳ ساعتی که دومی درحرکت بوده

تنبیه — میتوان همین جواب را از دو ترتیب بدست آورد بنابراینکه مجهول را عدد ساعاتی بگیریم که دومی طی میکند تا باوّلی برسد

پس از ای y فرض میکنیم که کالسکهٔ دوتم که ساعتی ۱۰ میل طی میکند در مدت y ساعت ۱۰ برابر y میرود یعنی $10y$ ودراین مدت اوّلی که ساعتی ۶ میل میرود $6y$ طی میکند اما چون سابق هم ۱۲ میل پیموده بود پس بهمه $6y$ بعلاوهٔ ۱۲ میل رفته وچون دو فاصله که آنها پیموده اند برابر هست

این معادله حاصل میشود

$$10y = 6y + 12$$

$$10y - 6y = 12$$

$$4y = 12$$

$$y = 3$$

یعنی

یعنی که اگر در وقت ۳۰ ساعت مدت رفته تا رسیده است با اولی و ۳۰ میل
یکی گردد چونکه هر ساعتی ۱۰ میل میرود و این فاصله همان است که بطریق
اوّل یافته بودیم

۷۰ – مسئله ۷۰ – ساعت ۴ درست حال زنگ ۴ زد میخواهیم بدانیم
بعد از چه مدت عقربهٔ بزرگ میرسد به کوچکتر

این مسئله را کمال شباهت است بمسئلهٔ سابق در ساعت ۴ عقربهٔ بزرگ
سر دوازده است و عقربهٔ کوچک بر سر ساعت چهار و بنابراین عقربهٔ کوچک
بقدر ۲۰ خانهٔ دقیقه جلو است از بزرگتر و در مدتی که کوچکتر همین ۵ خانه طی
کند بزرگتر ۶۰ خانه میرود و بعد از این مقدمه مدت مطلوب را مج فرض
میکنیم پس عقربهٔ بزرگ که ۶۰ خانه را در یکساعت طی میکند در مدت مج بقدر
مج برابر ۶۰ خانه راه میرود یعنی مج ۶۰ و عقربهٔ کوچک در همین مدت مج
برابر ۵ خانه یعنی مج ۵ و چون عدد خانه هائیکه عقربهٔ بزرگ طی میکند باید برابر
شود با ۲۰ خانه که عقربهٔ کوچک پیش افتاده بعلاوهٔ آنچه در مدت مج طی میکند

این تساوی حاصل شود $\text{۶۰ مج} = \text{۵ مج} + ۲۰$

$$\text{۶۰ مج} - \text{۵ مج} = ۲۰$$

$$\text{۵۵ مج} = ۲۰$$

$$\text{مج} = \frac{۲۰}{۵۵} = ۲۱' \frac{۹}{۱۱}$$

و از این قرار بمدت ۲۱ دقیقه $\frac{۹}{۱۱}$ یعنی در ۴ ساعت ۲۱ دقیقه $\frac{۹}{۱۱}$
عقربه بزرگ منطبق میشود بر کوچک

۷۱ - مسئلهٔ ۸ - شخصی وقت مرگ چند برادرزاده وارث داشت
و چنین وصیت نمود که سهم بزرگ آنها ۵۰۰ تومان بشود بعلاوه
سبع ما بقی و سهم دومی ۱۰۰۰ تومان بشود بعلاوه سبع ما بقی
و سهم سیمی ۱۵۰۰ تومان بشود بعلاوه سبع ما بقی و هکذا در
سایر و بعد از آنکه وصیت بعمل آمد معلوم شد که تمام برادرزاده‌ها
بیک اندازه قسمت برده اند حالا مطلوبست اولاً مبلغ ترکهٔ آن
شخص دوم عدد وراث و سیم سهم هر یک از آنها

جواب - این مسئله در بادی نظر چنان مینماید که صاحب چند مجهول است
اما باندک تأمل واضح میشود که تعیین همان مبلغ ترکه تنها کافی است چرا که بدانستن
آن مبلغ اشکالی برای یافتن عدد وراث و سهام آنها باقی نمیماند پس
ترکهٔ متوفی را x فرض میکنیم و موافق بیان مسئله سهم بزرگتر آنها میشود
۵۰۰ تومان بعلاوه سبع باقی و بعد از وضع ۵۰۰ تومان باقی میشود تمام
ترکه منهای ۵۰۰ یعنی $x - ۵۰۰$ و سبع آن میشود $\frac{x - ۵۰۰}{۷}$
پس سهم اولی میشود $۵۰۰ + \frac{x - ۵۰۰}{۷}$ و بعد از تجنیس چنین می شود
$\frac{۳۵۰۰ + x - ۵۰۰}{۷}$ یا $\frac{۳۰۰۰ + x}{۷}$ و سهم دومی چون باید ۱۰۰۰
تومان

تومان باشد بعلاوه سبع باقی چنین میشود

$$1000 + \frac{x-1000}{7} - \frac{3000+x}{49}$$

چراکه بعد از وضع از x مبلغ ۱۰۰۰ وسهم بزرگتر را باقی میماند

$x - 1000 - \frac{3000+x}{7}$ ومبلغ آن میشود

$$\frac{x-1000}{7} - \frac{3000+x}{49}$$

وچون براین بغیر بیفزائیم ۱۰۰۰ تومان راکه موضوع کرده ایم میشود

$$1000 + \frac{x-1000}{7} - \frac{3000+x}{49}$$

وچون جمیع سهام برابر شده اند ما سهم دو نفر اول را معادل مینمائیم باینصورت

$$\frac{3000+x}{7} = 1000 + \frac{x-1000}{7} - \frac{3000+x}{49}$$

وچون مخرج مشترک را ۴۹ قرار دهیم چنین میشود

$$\frac{21000+7x}{49} = 1000 + \frac{7x-7000}{49} - \frac{3000+x}{49}$$

وچون جمیع جمله ها را در ۴۹ ضرب کنیم چنین میشود

(حکم $\frac{3000+x}{49}$ در ص ۵۹ ذکر شده)

$$21000 + 7x = 49000 + 7x - 7000 - 3000 - x$$

$$7x - 7x + x = 49000 - 7000 - 3000 - 21000$$

$$x = 18000$$

پس مبلغ ثروت متوفی شد ۱۸۰۰۰ تومان وسهم طفل بزرگتر میشود ۵۰۰۰

بعلاوه

بعلاوه $\frac{1}{7}$ از باقی که ۱۷۵۰۰ تومان باشد حاصل میشود ۳۰۰۰ تومان
و چون سهام سایرین هم همین مبلغ است پس عدد وراث میشود ۶
نفر و بدین ترتیب صورت مسئله پیش رویم سهام ۵ نفر دیگر بدست
میآید

و از این قرار ترکهٔ متوفی ۱۸۰۰۰ تومان است و وراث ۶ نفر و سهم
هر یک ۳۰۰۰ تومان

* تنبیه – چون در مسئلهٔ مذکوره قرار دهیم

$$\frac{3000+x}{7}=a$$

$$500=b$$

محاسبات خیلی مختصر میشود

سهم دومی چنین میشود $2b+\frac{x-2b-a}{7}$ و بعد از تجنیس $2b$
چنین $\frac{14b+x-2b-a}{7}$ و یا نیز $\frac{12b+x-a}{7}$
و از توافق سهم اول a و سهم دومی $\frac{12b+x-a}{7}$ این معادله
حاصل شود $a=\frac{12b+x-a}{7}$

$$7a=12b+x-a$$

$$8a=12b+x$$

و چون a را بدل کنیم بمقدار خود چنین میشود

$$\frac{٨(٣٠٠٠ + x)}{٧} = ١٢\,\text{ب} + x$$

$$٢٤٠٠٠ + ٨x = ٨٤\,\text{ب} + ٧x$$

$$x = ٨٤\,\text{ب} - ٢٤٠٠٠$$

وچون در این تعبیر ب را بدل کنیم بمقدار خود چنین میشود

$$x = ٨٤ \times ٥٠٠ - ٢٤٠٠٠$$

$$x = ٤٢٠٠٠ - ٢٤٠٠٠$$

$$x = ١٨٠٠٠$$

* ٧٢ - مسئله - روباهی بقدر ٣٦ خیز خرگوشی را جلو رفت در مدتی که خرگوش چهار خیز کند روباه ٥ خیز مینماید اما ٧ خیز خرگوش برابر است با ١١ خیز روباه حال میخواهیم بدانیم که روباه چند خیز دیگر خواهد نمود تا خرگوش باو برسد

جواب - فرض میکنیم x عدد خیزهائی باشد که باید روباه بنماید وچون همین وقت که خرگوش شروع بحرکت میکند او ٣٦ خیز هم جلو است بهمه جهة x + ٣٦ خیز روباه نموده واما خرگوش باید آنقدر خیز کند که طولش برابر شود با x + ٣٦ خیز روباه

وچون در مدتی که روباه ٥ خیز نماید خرگوش ٤ خیز میزند پس وقتیکه روباه یک خیز زند خرگوش بقدر $\frac{٤}{٥}$ خیز زند وبنابراین در مدتیکه او (اول)

x

پس خیز زند آخری $\frac{۴x}{۵}$ خیز میزند و حال اگر طول یک خیز روباه را ۱ فرض کنیم طول یک خیز خرگوش میشود $\frac{۱۱}{۷}$ (چراکه بنابر صورت مسئله هرگاه طول یک خیز روباه را ۷ فرض کنیم طول یک خیز خرگوش میشود ۱۱ پس هرگاه طول خیز روباه را ۱ فرض کنیم اخیز خرگوش میشود $\frac{۱۱}{۷}$) پس عملی باقی نیست جز ضرب کردن دو طول ۱ و $\frac{۱۱}{۷}$ در عدد خیزهای که روباه و خرگوش میزنند یعنی در $x + ۳۶$ برای اولی و در $\frac{۴x}{۵}$ برای دومی

و این دو حاصل چنین است $x + ۳۶$ و $\frac{۴۴x}{۳۵}$ و چون این دو مقدار برابرند چراکه ما عدد خیزهای خرگوش و طول آنها را راجع نمودیم بآنکه از روی طول خیزهای روباه معین شوند پس این تساوی حاصل شود

$$۳۶ + x = \frac{۴۴x}{۳۵}$$

$$۱۲۶۰ + ۳۵x = ۴۴x$$

$$-۹x = -۱۲۶۰$$

$$۹x = ۱۲۶۰$$

$$x = \frac{۱۲۶۰}{۹} = ۱۴۰$$

پس معلوم شد که روباه باید ۱۴۰ خیز دیگر نماید تا خرگوش را دریابد و بهمه جهة مقدار خیزهای او اینست $۳۶ + ۱۴۰$ یعنی ۱۷۶

و عدد خیزهای خرگوش $\frac{۴}{۵}$ عدد ۱۴۰ است یعنی ۱۱۲ چراکه روباه متعاقب شده است

شده است در همان مدتی که ۱۴۰ خیز زده و اما طول ۱۱۲ خیز خرگوش باید برابر باشد با طول ۱۷۶ خیز روباه والا باو نمیرسد و سابق ذکر شد که چون طول یک خیز روباه را ۱ فرض کنیم طول یک خیز خرگوش میشود $\frac{11}{7}$ پس باید چنین شود

$$112 \times \frac{11}{7} = 176 \quad \text{یا} \quad 176 \times 1$$

و حاصل ضرب ۱۱۲ در $\frac{11}{7}$ درست ۱۷۶ است

* ۷۳ — و حال مقصود ما گفتن بعضی از مسائل مذکوره هست تا معلوم شود که فایده جبر و مقابله یا بدست آوردن قواعد کلیه است در حل جمیع مسائلی که از یک جنس باشند یعنی مسائلی که اختلافشان همین در اعداد مفروضه باشد چنانچه مسئله دوم و چهارم و ششم را کلی میسازیم

* ۷۴ — مجموع دو عدد a است و تفاضل آنها b کدام اند این دو عدد

چون یکی از آنها مثلاً کوچکتر را x فرض کنیم بزرگتر میشود بقدر مجموع منهای کوچکتر یعنی $a - x$ و چون دو عدد شدند $a - x$ و x تفاضلشان میشود $a - x - x$ یعنی $a - 2x$ اما موافق بیان مسئله آن تفاضل برابر b است پس این تساوی حاصل شود

$$a - 2x = b$$

$$-2x = b - a$$

وبعد

و بعد از تغییر علامات

$$2x = a - b$$

$$x = \frac{a-b}{2} = \frac{a}{2} - \frac{b}{2}$$

و حال برای تحصیل عدد بزرگتر باید از a موضوع کنیم مقدار معلوم x را تا این تساوی حاصل شود

$$a - \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{2} + \frac{b}{2} \qquad (۱۸)$$

پس دو عدد مطلوب چنین شد کوچکتر $\frac{a}{2} - \frac{b}{2}$ و بزرگتر $\frac{a}{2} + \frac{b}{2}$

و از این قرار چون مجموع دو عدد و تفاضل اند و به دست باشد تحصیل عدد کوچکتر با این است که از نصف مجموع نصف تفاضل را موضوع کنیم و تحصیل بزرگتر با اینکه بر نصف مجموع نصف تفاضل را بیفزائیم

* ۷۵ — دو چشمه جاری میشوند در استخری که گنجایش آن c است و چون اولی تنها جاری باشد انبار را در مدت a ساعت پر میکند و دومی تنها در مدت b ساعت و مطلوب است مدتی که هر دو باتفاق انبار را پر کنند

مدت مطلوب را x فرض میکنیم و اولی که گنجایش c را در a ساعت پر میکند در یکساعت $\frac{c}{a}$ استخر را پر میکند و در x ساعت x برابر $\frac{c}{a}$ یعنی $\frac{cx}{a}$ را و همچنین چشمه دوم در یک ساعت $\frac{c}{b}$

پر میکند در x ساعت $\frac{cx}{b}$ امّا دو چشمه چون با هم جاری شدند
در مدت x تمام حوض را پر میکنند پس

$$\frac{cx}{a} + \frac{cx}{b} = c$$

و چون دو عضو این تساوی را بر c قسمت کنیم چنین میشود

$$\frac{x}{a} + \frac{x}{b} = 1$$

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ax}{ab} = 1$$

$$bx + ax = ab$$

$$x(b+a) = ab$$

$$x = \frac{ab}{a+b}$$

بیان این نتیجه چنین است که برای یافتن مدت پر شدن استخری بهر گنجایش باشد بجاری شدن دو چشمه باید ضرب نمود مدتی را که چشمه اوّل تنها ظرف را پر میکند در مدتی که دوّمی بفرض تنهائی انجا را پر میکند و حاصل را قسمت نمود بر مجموع آن دو مدت

۷۶ – شخصی وقت مرگ ترکه خود را برای جمعی میراث خوار گذاشت و بسبب وصیت او باید بزرگتر وراث a تومان ببرد بعلاوهٔ n ام جزو باقی و دوّمی $2a$ ببرد بعلاوهٔ n ام جزو باقی و سیمی $3a$ بعلاوهٔ n ام جزو باقی و هکذا و بعد از آنکه سهام انها

انها داده شد دیدیم همه برابر برده اند حال مطلوب است اولا
مبلغ ترکه و دوم عدد وراث و سیم سهم هر یک از آنها
فرض میکنیم ترکه را x
و چون سهم اولی a است بعلاوهٔ m ام جزو باقی چنین میشود

$$a+\frac{x-a}{m} \quad \text{یا} \quad \frac{am+x-a}{m}$$

و سهم دومی چون باید $2a$ باشد بعلاوهٔ m ام جزو باقی چنین میشود

$$2a+\frac{x-2a}{m}-\frac{am+x-a}{m^2}$$

چراکه چون از x موضوع کنیم $2a$ بعلاوهٔ سهم اولی را باقی میماند چنین

$$x-2a-\frac{am+x-a}{m}$$

و چون آنرا بر m قسمت کنیم چنین میشود

$$\frac{x-2a}{m}-\frac{am+x-a}{m^2}$$

و چون بران بیفزائیم $2a$ را که ابتدا برده بود چنین میشود

$$2a+\frac{x-2a}{m}-\frac{am+x-a}{m^2}$$

و چون جمیع سهام برابر شده لذا از دو سهم اول این تساوی حاصل میشود

$$\frac{am+x-a}{m}=2a+\frac{x-2a}{m}-\frac{am+x-a}{m^2}$$

و چون m^2 را مخرج مشترک بگیریم چنین میشود

$$\frac{am^2+mx-am}{m^2}=2a+\frac{mx-2am}{m^2}-\frac{am+x-a}{m^2}$$

و چون

و چون جمیع جمله‌ها را در m^2 ضرب کنیم چنین میشود (و برای ضرب جمله $\frac{a\ m + x - a}{m^2}$ رجوع کنید به ۵۹)

$$am^2 + mx - am = 2am^2 + mx - 2am - am - x + a$$

و بعد از حذف جمله‌های مشترکه در هر دو عضو چنین میشود

$$= am^2 - 2am - x + a$$

$$x = am^2 - 2am + a$$

$$x = a(m^2 - 2m + 1)$$

امّا $m^2 - 2m + 1$ مجذور است از $m - 1$ پس

$$x = a(m-1)^2$$

و از این قرار $a(x-1)^2$ صورت کل ترکه است

و سهم ارشد اولاد چون باید a باشد بعلاوه m ام جزو باقی چنین میشود

$$a + \frac{a(m-1)^2 - a}{m} = \frac{a\cdot m + a(m-1)^2 - a}{m}$$

امّا $$\frac{am + a(m-1)^2 - a}{m} = \frac{am + am^2 - 2am + a - a}{m}$$

$$\frac{am + am^2 - 2am + a - a}{m} = \frac{am^2 - am}{m} = am - a$$

و از اینجا $$am - a = a(m-1)$$

و حالا برای یافتن عدد وراث باید قسمت نمود تمام ترکه $a(m-1)^2$ را

بر سهم اوّلی که این است $a(m-1)$ و آن خارج قسمت این است

$$m - 1$$

$$\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)} = \frac{(n-1)^2}{n-1} = n-1$$

پس سه مجهول مسئله اینها باشند

$a(n-1)^2$ صورت ترکهٔ قسمت کردنیست

$a(n-1)$ سهم هر یک از وراث است

$n-1$ عدد وراث است

* در حل این مسئله بنا را همین تعادل دو سهم اوّل قرار دادیم و حالا مینمائیم که مقدار هرکدام از سهام درست $a(n-1)$ است

فرض میکنیم که p (مثلاً ۵) عدد از سهام را یافتیم هرکدام شد $a(n-1)$ و میخواهیم سهم وارث $p+1$ اُم را بدست آوریم و چون مقدار یکی از سهام شده بود $a(n-1)$ مجموع p سهام میشود $p\,a(n-1)$ و بنا براین سهم مرتبهٔ $(p+1)$ اُم که دو فقره است فقرهٔ اولش این مقدار میشود $a(p+1)$ [چونکه اولی و دوّمی و سیمی .... و $(p+1)$ اُم فقرهٔ اوّل سهامی که دارند a است و $2a$ و $3a$ .... تا $a(p+1)$] بعلاوهٔ فقرهٔ دوم $\frac{a(n-1)^2 - p\,a(n-1) - a(p+1)}{n}$

یعنی بهمه جهة این مقدار است

$$a(p+1) + \frac{a(n-1)^2 - p\,a(n-1) - a(p+1)}{n}$$

و چون جملهٔ $a(p+1)$ را بصورت کسر درآوریم چنین میشود

$$\frac{am(p+1)+a(m-1)^2-pa(m-1)-a(p+1)}{m}$$

وچون اعمال ضرب را بجا آوریم چنین میشود

$$\frac{amp+am+am^2-2am+a-amp+ap-ap-a}{m}$$

وبعد از مقابله وحذف جمله هائی که تکافؤ هم میکنند چنین میشود

$$\frac{am^2-am}{m}=am-a=a(m-1)$$

وچون سهم مرتبهٔ $p+1$ نیز شد $a(m-1)$ میتوان گفت که
تمام سهام برابر همدیگر اند

مسائل حل نمودنی

۸۵ - کدام عدد است که $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ آن جمعا بشود ۳۵

۸۶ - کدام عدد است که چون آن را بر ۶ قسمت کنید خارج قسمتش بشود ۱۹

۸۷ - دو عدد میخواهیم که تفاضلشان بشود ۳۸ ومجموعشان بشود ۴۸۷

۸۸ - چه عددیست که کسور $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{4}$ و $\frac{1}{5}$ آن جمعا بشود ۴۷

۸۹ - عددی مطلوب است که چون بر آن بیفزائیم ۴۸ حاصل برابر مضاعف همان عدد بشود منهای ۳

۹۰ - کدام عدد است که چون ربع آن را بر آن بیفزائیم حاصل بشود ۶۰

۹۱ - میخواهیم عدد ۵۲۵ را بر دو جزء قسمت کنیم چنانچه اگر یکی از آنها را قسمت کنیم بر ۲۵ وجزء دیگر را بر ۳۰ مجموع دو خارج قسمت بشود ۲۰

۹۲ - مبلغ ۷۵۸۰ قران میبایست میان سه نفر قسمت بشود و مطلوب سهم هر نفر است بنابرآنکه سهم دوّمی مضاعف اوّلی شود منهای ۵۰۰ قران و سهم سیّمی معادل نصف مجموع دو سهم اوّل شود بعلاوهٔ ۵۰ قران

۹۳ - میخواهیم عدد ۹۹۳۶ را بر نسبت سه عدد ۵ و ۷ و ۱۲ قسمت کنیم

۹۴ - میخواهیم مبلغ ۹۲۴۶ قران را میان چهار نفر قسمت کنیم بر وجهی که اگر سهم اوّلی ۲ قران باشد سهم دوّمی بشود ۳ قران و اگر سهم دوّمی ۵ قران باشد سهم سیّمی بشود ۶ قران و اگر سهم چهارمی بشود ۴ قران سهم سیّمی بشود ۳ قران

۹۵ - شخص نوکری هر سال مبلغ ۳۰۰ قران مواجب دارد بعلاوه مبلغی انعام و مطلوب قدر انعام اوست بنابرآنکه بدانیم بعد از ۱۰ ماه خدمت باقای خود مستحق ۲۴۰ قران شده بعلاوهٔ تمام آن مبلغ انعام

۹۶ - شخصی وقت مردن مبلغ ۴۰۰۰ قران سهم فقرا قرار داد و ۱/۱۵ ترکه‌اش را وصیت نمود صرف بنای تکیه شود و مریضخانه و ۱/۴ صرف بنای مکتب خانه و ۴/۱۰ بدو نفر صلهٔ رحم بدهند حالا مطلوب است اوّلا مبلغ ترکهٔ آن شخص و دوّم مبلغی که باید بمصرف تکیه و مریضخانه برسد و سیّم مبلغی که باید صرف مکتب خانه بشود و چهارم سهم هرکدام از دو صلهٔ رحم

۹۷- میخواهیم مبلغ ۱۳۲۰ قران میانهٔ سه نفر قسمت کنیم چنانچه سهم دوّمی $\frac{۵}{۶}$ اوّلی باشد و سهم سیّمی $\frac{۴}{۵}$ مجموع دو سهم اوّلی

۹۸- فاصلهٔ پاریس از لیون ۵۱۲ کیلومتر است واگن چاپاری از پاریس حرکت نمود یکساعت قبل از آنکه واگن چاپاری لیون حرکت کند و همان واگن هر ساعت ۶۰ کیلومتر راه میرود واگن لیون ساعتی ۵۳ کیلو مقصود اینست که این دو واکون در چه فاصله از لیون هم میرسند و هر کدام چه قدر مسافت طی کرده اند

۹۹- سه نفر وارث مبلغی ترکه را باید میان خود قسمت کنند چنانچه اوّلی $\frac{۱}{۳}$ مجموع ببرد و دوّمی $\frac{۵}{۸}$ اوّلی بعلاوهٔ ۴۰۰ قران و سیّمی $\frac{۳}{۴}$ دوّمی بعلاوهٔ ۱۰۰۰ قران و بالجمله مبلغ ۱۶۲۷۵ قران هم باید بمصرف تعمیر مریضخانه و مکتب خانه برسد حالا مطلوب مبلغ ترکه است و سهم هر وارث

فصل نهم

در حل معادلات درجهٔ اوّل با چند مجهول

۷۷- در حل مسائلی که تا اینجا بحث مینمودیم وضع یک معادله با یک مجهول کافی بود امّا مسائلی بسیار دیده میشود که حلّ آنها موجب وضع دو سه معادله است یا بیشتر

۷۸- در میان این مسائل بعضی چنان هست که از روی بیان آنها میتوان بعدهٔ

مجهولات مسئله معادله وضع نمود و بعضی بر خلاف آن میتوان باندازهٔ مجهولات
معادله طرح نمود نوع اوّل را مسائل محدود و معین گویند چراکه مقدار عددی مجهول
در جمیع معادلات یک چیز معین است و نوع دوّم را سیّاله گویند چراکه در این
قسم مسائل هر مجهولی ممکن است صاحب چندین عدد جواب شود یا جوابهای
بیشمار قبول کند

مثلا این دو معادله

$$2x + 3y = 9$$

$$3x + 7y = 16$$

ترجمهٔ جبری مسئلهٔ معینی است که دارای دو مجهول باشد امّا این معادله

$$4x - 7y = 21$$

نظیر مسئلهٔ سیّاله است که نیز صاحب دو مجهول است (و باندک تأمل ملتفت
میشوید که در حالات بیشماری تفاضل مابین $4x$ و $7y$ ممکن است
همین عدد ۲۱ باشد)

۷۹ – در مسئلهٔ غیر سیّاله هرگاه بخواهیم اشعار کنیم باینکه هر مجهول را همواره
مقدار معین مشخصی در معادلات جواب است چنین تعبیر کنیم که آن معادلات
متوافق اند (یعنی باهم سازش دارند و یکدستند و یکدستگاه
میباشند)

۸۰ – قواعد مختلفه را که اختیار نموده اند برای حلّ معادلات آنها را

قواعد اخراج و تبعید و الغا گویند چرا که در جمیع حالات متعدده یک مجهول را از معادلات بیرون میکنند تا دستگاه معادلات مبحث ساده تر از دستگاه مفروض بشود

۸۱ – قواعد معموله تبعید بر سه گانه است تبدیل و مقایسه و تحویل و ما قاعده اول را اختیار نموده معمول میداریم چون بهتر است و مستعمل تر و لیکن بعد از مختصری در شرح ان دو قاعده دیگر بیان میکنیم تا بتواند شاگرد در تمرینش استعمال کند

۸۲ – و حالا مشغول میشویم بحل معادلات درجه اول که نظیر مسائل غیر بسیار باشند

۸۳ – در حل دسته معادله دو تائی – بقاعده تبدیل مقدار یک مجهول را از یک معادله بیرون کشید چنانچه گویا مجهول دیگر معلوم است و ان وقت این مقدار را در معادله دوم گذاریم و انوقت ما را یک معادله است و یک مجهول

۸۴ – همان دو معادله سابق ۷۸ را اینجا باز میاوریم

$$(۱) \quad ۲x + ۳y = ۹$$

$$(۲) \quad ۳x + ۷y = ۱۶$$

پس در معادله (۱) حرف y را معلوم فرض میکنیم و مقدار x را بیرون میاوریم تا چنین شود $x = \frac{۹ - ۳y}{۲} \quad (۳)$

وچون

وچون این مقدار را در معادلهٔ (۲) بدل کنیم چنین میشود

$$\frac{۳(۹-۳y)}{۲}+۷y=۱۶$$

واین معادلهٔ اخری که بیش از یک مجهول دارا نیست چون بدستور گذشته معامله کنیم بتدریج چنین میشود

$$\frac{۲۷-۹y}{۲}+۷y=۱۶$$

$$۲۷-۹y+۱۴y=۳۲$$

$$-۹y+۱۴y=۳۲-۲۷$$

$$۵y=۵$$

$$y=۱$$

وچون این مقدار y را در معادلهٔ (۳) بدل کنیم بجای y چنین میشود

$$x=\frac{۹-۳\times۱}{۲}$$

ازانجا $x=۳$

وتحقیق صحت این دوجواب آسان است چراکه در هر دو معادله (۱) و (۲) درست میایند در اولی چنین میشود

$$۲\times۳+۳\times۱=۹$$

ودر دومی $۳\times۳+۷\times۱=۱۶$

۸۵ — هروقت معادلات با دو تا باشد از روی همین یک مثال راه حل ... فت ... بیشتر ... دستور

دو دستور بدست میاید با وجود آن دستور العلمهای دیگر نیز ذکر میکنیم تا در هر موقع مناسب بعضی اختصارات بتوان در محاسبات بکار برد

۸۶ - مثال - میخواهیم این دو معادله را حل کنیم

$$(۱) \quad ۵x + ۴y = ۲۲$$

$$(۲) \quad ۳x + y = ۹$$

مقدار y را از معادلهٔ (۲) درآورده چنین شود

$$(۳) \quad y = ۹ - ۳x$$

و از آن در معادلهٔ (۱) بجای y قرار داده تا چنین شود

$$۵x + ۴(۹ - ۳x) = ۲۲$$

$$۵x + ۳۶ - ۱۲x = ۲۲$$

$$۳۶ - ۷x = ۲۲$$

$$-۷x = ۲۲ - ۳۶$$

$$۷x = ۳۶ - ۲۲$$

$$۷x = ۱۴$$

$$x = ۲$$

و چون این مقدار را در معادلهٔ (۳) قرار دهیم چنین میشود

$$y = ۹ - ۳ \times ۲$$

$$y = ۳$$

۸۷- مثال دوم - میخواهیم این دو معادله را حل کنیم

$$7x + 3y = 33 \qquad (1)$$

$$7x - 2y = 13 \qquad (2)$$

از معادله (۱) مقدار x چنین میشود

$$x = \frac{33 - 3y}{7} \qquad (3)$$

و چون آنرا در دوم قرار دهیم چنین میشود

$$\frac{7(33 - 3y)}{7} - 2y = 13$$

و چون دو جمله کسر را بر ۷ قسمت کنیم چنین میشود

$$33 - 3y - 2y = 13$$

$$-5y = 13 - 33$$

$$-5y = -20$$

$$5y = 20$$

$$y = 4$$

بعد از تبدیل مقدار y در تعبیر (۳) چنین شود

$$x = \frac{33 - 3 \times 4}{7}$$

$$x = 3$$

۸۸- مثال ۳ - در حل این دو معادله

$$(۱)\qquad ۶x - ۴y = ۱۰$$

$$(۲)\qquad ۱۸x + ۸y = ۷۰$$

چون عامل ۲ را در معادلات حذف کنیم دستگاه تازه چنین شود

$$(۳)\qquad ۳x - ۲y = ۵$$

$$(۴)\qquad ۹x + ۴y = ۳۵$$

و چون مقدار y را از معادلهٔ (۳) بگیریم

$$(۵)\qquad y = \frac{۳x - ۵}{۲}$$

و چون در معادلهٔ (۴) بجا گذاریم چنین شود

$$۹x + ۴.\frac{(۳x - ۵)}{۲} = ۳۵$$

و چون دو جملهٔ کسر را بر ۲ قسمت کنیم چنین میشود

$$۹x + ۲(۳x - ۵) = ۳۵$$

و بالجمله $x = ۳$

و چون این مقدار را در معادلهٔ (۵) قرار دهیم چنین شود

$$y = ۲$$

دستور حل معادلات درجهٔ اولی هر چند عدد باشند

۸۹ – عدد معادلات حل کردنی هر چند باشند دستور العمل یکیست از این قرار باید از یکی از معادلات مسئله مقدار یکی از مجهولات را بیرون کشید

کشید بنابرانکه سائر را معلوم انکاریم و این مقدار را در سایر معادلات بجای ان مجهول کذاشت تا یک مجهول و یک معادله از میان برود و کسر کند وانوقت همین معامله را در دستکاه معادلات تازه جاری کنیم یعنی مقدار یک مجهول را از یک معادله بکیریم و در سایر بکذاریم تا انکه باز یک مجهول و یک معادله کسر کند تا انکه برسیم در اخر بجائی که زیاده از یک مجهول و از یک معادله نداشته باشیم پس این معادلهٔ یک مجهولی را حل کنیم تا مقدارش بدست اید وانوقت بقهقرا متدرجا بالا رویم در سایر تعبیرات تا مقادیر جمیع مجهولات بدست اید

۹۰ - و بنابرانکه بهمین دستور پیش روید باید در جمیع حالات محاسبه را طوری مجری داشت که بقدر امکان سهل و مختصر شود

۹۱ - مثال ۱ - میخواهیم این دستگاه را حل کنیم

$$(1)\quad x + 4y - 2z = 3$$

$$(2)\quad x - 8y + 12z = 21$$

$$(3)\quad 2x + y + 3z = 13$$

وچون از معادلهٔ (۱) مقدار x را بیرون آوریم بنابرانکه سائر y و z را معلوم انکاریم چنین میشود

$$(۴)\qquad x = ۳ - ۴y + ۲z$$

وچون این مقدار را در معادلات (۲) و (۳) قرار دهیم چنین شوند

$$۳ - ۴y + ۲z - ۸y + ۱۲z = ۲۱$$

$$۲(۳ - ۴y + ۲z) + y + ۳z = ۱۳$$

وبعد از جمیع اختصارات وتحویلات

$$۱۴z - ۱۲y = ۱۸$$

$$۷z - ۷y = ۷$$

وچون در معادلهٔ اولی عامل ۲ را حذف کنیم ودر دوم عامل ۷ را چنین میشود

$$۷z - ۶y = ۹$$

$$z - y = ۱$$

وازمعادلهٔ اخیر بیرون آید

$$(۵)\qquad z = ۱ + y$$

وچون مقدار z را در مقدم قرار دهیم چنین شود

$$۷(۱ + y) - ۶y = ۹$$

وبعد از حل این معادله نتیجه شود $\qquad y = ۲$

وبعد از تبدیل این مقدار در تعبیر (۵) مقدار z چنین شود

$$z = ۳$$

وبالجمله چون این دو مقدار را نقل کنیم در معادلهٔ (۴) چنین شود

$$x = 1$$

واین نکته را زود توان بتحقیق رسانید که مقادیر $y = 2$ و $z = 3$ و $x = 1$ در معادلات مفروضه صدق کنند

۹۲ — مثال ۲ — در حل این معادلات

$$(1) \quad x + y + 3z + u = 14$$

$$(2) \quad 4x + 2y + z + u = 25$$

$$(3) \quad 2x + y + 3z - u = 16$$

$$(4) \quad 5x - 4y - z + u = 7$$

از معادلهٔ (۱) مقدار u چنین شود

$$(5) \quad u = 14 - x - y - 3z$$

و چون از او در سه معادلهٔ دیگر گذاریم چنین شود

$$4x + 2y + z + 14 - x - y - 3z = 25$$

$$2x + y + 3z - 14 + x + y + 3z = 16$$

$$5x - 4y - z + 14 - x - y - 3z = 7$$

و بعد از اختصارات

$$3x + y - 2z = 11$$

$$3x + 2y + 6z = 30$$

$$4x - 5y - 4z = -7$$

و چون مقدار z را از اوّلی این سه معادله بیرون آوریم چنین شود

$$(6)\qquad z = \frac{3x + y - 11}{2}$$

و چون آن را در دو تای دیگر قرار دهیم چنین شود

$$3x + 2y + 6 \cdot \frac{3x + y - 11}{2} = 30$$

$$4x - 5y - 4\,\frac{3x + y - 11}{2} = -7$$

یا

$$3x + 2y + 3(3x + y - 11) = 30$$

$$4x - 5y - 2(3x + y - 11) = -7$$

و بعد از جمیع اختصارات چنین میشود

$$12x + 5y = 63$$

$$2x + 7y = 29$$

و از معادلهٔ دوّم در آید

$$(7)\qquad x = \frac{29 - 7y}{2}$$

و چون این مقدار را در معادلهٔ سابق گذاریم چنین شود

$$12\,\frac{29 - 7y}{2} + 5y = 63$$

$$6(29 - 7y) + 5y = 63$$

$$174 - 42y + 5y = 63$$

$$-۳۷y = ۶۳ - ۱۷۴$$

$$۳۷y = ۱۱۱$$

$$y = ۳$$

وچون مقدار y را در تعبیر (۷) گذاریم برای x چنین شود

$$x = \frac{۲۹ - ۲۱}{۲}$$

$$x = ۴$$

وچون دو مقدار y و x را در تعبیر (۶) گذاریم برای z چنین شود

$$z = \frac{۱۲ + ۳ - ۱۱}{۲}$$

$$z = ۲$$

وبالجمله مقادیر هر سه جمله x و y و z را چون در تعبیر (۵) گذاریم

مقدار u چنین شود

$$u = ۱۴ - ۴ - ۳ - ۶$$

$$u = ۱$$

پس چهار مجهول چنین میشوند

$$y = ۳$$
$$x = ۴$$
$$z = ۲$$
$$u = ۱$$

تنبیه - هرگاه اتفاق افتد که همه مجهولات در همه معادلات یافت باشند عمل القای آنها خیلی زودتر از آنچه در مثالهای مذکور دیدید واقع شود

۴۳ - مثال ۳ - در حل این پنج معادله

$$(1)\quad x + y + z - t = 2$$

$$(2)\quad x + y + 2t = 16$$

$$(3)\quad 2x + y = 8$$

$$(4)\quad 5x + 2u = 13$$

$$(5)\quad 3y + 2u = 18$$

میتوان در الغای مجهولات از هرکدام شروع نمود اما اگر ابتدا کنیم به u محاسبات خیلی مختصر میشود از معادله (۴) چنین استخراج شود

$$(6)\quad 2u = 13 - 5x$$

این مقدار را چون در معادله (۵) نقل کنیم چنین شود

$$3y + 2(13 - 5x) = 18$$

$$3y + 26 - 10x = 18$$

$$3y - 10x = -8$$

$$10x - 3y = 8$$

و چون معادله (۳) را نزدیک کنیم با این معادله اخیر آنوقت باید این دو معادله را حل نمود

$$2x + y = 8$$

$$10x - 3y = 8$$

و مقدار y از معادلهٔ اول چنین میشود

$$y = 8 - 2x \qquad (7)$$

و چون آنرا در دوم نقل کنیم چنین میشود

$$10x - 3(8 - 2x) = 8$$

$$10x - 24 + 6x = 8$$

$$16x = 32$$

$$x = 2$$

این مقدار x را چون در معادلهٔ (۶) نقل کنیم در (۷) برای y و u چنین در آید

$$y = 4$$

$$u = 3$$

و بعد از تبدیل دو مقدار x و y در معادلهٔ (۲) چنین شود

$$t = 5$$

و بالجمله چون سه مقدار مجهولات x و y و t را در معادلهٔ (۱) قرار دهیم چنین شود

$$z = 1$$

و خلاصه مجهولات چنین شوند

$$x = 2$$

$$y = 4$$

$$u = 3$$

$$t = 5$$

$$z = 1$$

۹۴ - مثال ۴ - در حل این معادلات

$$(1)\quad x + y = 8$$
$$(2)\quad y + u = 6$$
$$(3)\quad u - 2t = 2$$
$$(4)\quad t + z = 3$$
$$(5)\quad z + w = 9$$
$$(6)\quad w - x = 2$$

از معادله (۱) نتیجه شود $x = 8 - y$

وچون بدل کنیم در معادله (۶) چنین شود

$$w - 8 + y = 2$$
$$w + y = 10$$

وچون این تغییر را ملحق کنیم بمعادلات (۲) و (۳) و (۴) و (۵) این پنج معادله نتیجه شود

$$y + u = 7$$
$$u - 2t = 2$$
$$t + z = 3$$
$$z + w = 9$$
$$w + y = 10$$

وچون مقدار y را از اولی درآوریم ودر آخری بگذاریم این چهار معادله بدست آید

$$ع - ۲ح = ۲$$
$$ح + ز = ۳$$
$$ز + س = ۹$$
$$س - ع = ۳$$

وچون مقدار ع را از اولی درآوریم و در چهارم قرار دهیم

$$ح + ز = ۳$$
$$ز + س = ۹$$
$$س - ۲ح = ۵$$

وچون مقدار ح را از اولی درآوریم و در سیم قرار دهیم چنین شود

$$ز + س = ۹$$
$$س + ۲ز = ۱۱$$

وبالجمله چون ز را از این دو معادله بیرون کنیم

$$س = ۷$$

وبعد بقهقرا چنین استخراج شود

$$ز = ۲$$
$$ح = ۱$$
$$ع = ۴$$
$$ی = ۳$$
$$ك = ۵$$

۹۵ – وحال دستوری سهل‌تر ذکر کنیم برای تعیین مجهولات مذکوره

از معادلهٔ (۱) ب ۹۴ نتیجه شود

$x = ٨ - y$

اما از معادله (٢) $y = ٧ - v$

و چون آن را در مقدار x گذاریم چنین شود

$x = ٨ - ٧ + v$

$x = ١ + v$

و چون در معادله (٣)

$v = ٢ + ٢t$

پس $x = ١ + ٢ + ٢t$

$x = ٣ + ٢t$

و از معادله (٤) استخراج شود

$t = ٣ - z$

بنابراین $x = ٣ + ٢(٣ - z)$

$x = ٣ + ٦ - ٢z$

$x = ٩ - ٢z$

و از معادله (٥) استخراج شود

$z = ٩ - u$

پس $x = ٩ - ٢(٩ - u)$

$x = ٩ - ١٨ + ٢u$

$x = ٢u - ٩$

و بالجمله مقدار u را $x + ٢$ چون از معادله (٦) درآوریم و در تعبیر x نقل کنیم چنین شود

$x = ٢(٢ + x) - ٩$

$x = ٤ + ٢x - ٩$

$x = ٢x - ٥$

$x = ٥$

و چون v بدست آمد مقادیر سایر زود معلوم شود

* در خارج کردن مجهول بعمل مقابله

۹۶ - در حل یک دستگاه معادلات بقاعدهٔ مقابله باید مقدار مجهولی مشخص را از جمیع معادلات بیرون کشید و بعد آنها را دو بدو بهم سنجید تا بیک مرتبه یک مجهول و یک معادله از میان برود و در این دستگاه تازه نیز همین عمل را مجری داشت تا در آخر بیش از یک معادله و یک مجهول باقی نماند

و نظر بآنکه این دستور خوب مفهوم شود چند دستگاه معادله را برین وجه حل کنیم

۹۷ - مثال در این معادلات

(۱) $$x + y + 2v + 3z = 18$$

(۲) $$x + 2y + v + z = 17$$

(۳) $$y + 3v - 4z = 9$$

(۴) $$v - z = 2$$

از دو معادلهٔ (۱) و (۲) مقدار x چنین استخراج شود

(۵) $$x = 18 - y - 2v - 3z$$

(۶) $$x = 17 - 2y - v - z$$

از این دو مقدار x معادلهٔ ذیل نتیجه شود

$$18 - y - 2x - 3z = 17 - 2y - x - z$$

و بعد از جمع منفصلات $\quad 2z + x - y = 1$

و چون این معادله را ملحق کنیم بدو معادلهٔ (٣) و (۴) که شامل y هستند

چنین شود

$$2z + x - y = 1$$
$$y + 3x - 4z = 9$$
$$x - z = 2$$

از معادلهٔ اولین برآید $\quad y = 2z + x - 1 \quad (۵)$

و از دوم $\quad y = 9 - 3x + 4z \quad (۶)$

و با این دو مقدار y یک معادله ترکیب شود

$$2z + x - 1 = 9 - 3x + 4z$$

یا $\quad 4x - 2z = 10$

و چون تمام را بر ٢ قسمت کنیم $\quad 2x - z = 5$

و چون این را بمعادلهٔ (۴) نزدیک کنیم دو معادله شود چنین

$$x - z = 2$$
$$2x - z = 5$$

و از اولی برآید $\quad z = x - 2 \quad (٧)$

و از دومی $\quad z = 2x - 5 \quad (٨)$

و بعد از تعادل این دو مقدار z

$$v - 2 = 2v - 5$$
$$v = 2v - 3$$
$$3 + v = 2v$$
$$v = 3$$

و چون این مقدار v را در یکی از دو تعبیر (۷) گذاریم برای z چنین شود

$$z = 1$$

و چون دو مقدار v و z را در یکی از تعبیرات (۶) قرار دهیم مقدار y چنین شود

$$y = 4$$

و بالجمله چون مقادیر سه مجهول v و z و y را در یکی از تعبیرات (۵) قرار دهیم مقدار x چنین شود $x = 5$

۹۸ - مثال ۲ - در حل این معادلات

$$x + y = 8 \qquad (1)$$
$$x + v = 11 \qquad (2)$$
$$x + t = 6 \qquad (3)$$
$$x + u = 12 \qquad (4)$$
$$u + z = 9 \qquad (5)$$
$$v - 2t = 4 \qquad (6)$$

از چهار معادلهٔ اول اینها استخراج شود

$$x = 8 - y$$
$$x = 11 - v$$
$$x = 6 - t$$
$$x = 12 - u$$

و چون

وچون مقادیر طه را دو بدو برابر کنیم این سه معادله ترکیب شود

۸ − ی = ۱۱ − مح
۱۱ − مح = ۴ − ط
۴ − ط = ۱۲ − س

که بعد از تحویل و اختصار چنین میشوند

مح − ی = ۳
مح − ط = ۵
س − ط = ۶

وچون دو معادلهٔ اخیر مسئله را باینها ملحق کنیم چنین شوند

مح − ی = ۳
مح − ط = ۵
س − ط = ۶
س + ز = ۹
مح − ۲ط = ۴

وچون مقدار ط را از دوم واز آخری خارج کنیم چنین میشود

ط = مح − ۵
ط = (مح − ۴) / ۲

وآنوقت یک معادله تشکیل میشود

مح − ۵ = (مح − ۴) / ۲
۲مح − ۱۰ = مح − ۴
مح = ۶

وآنوقت از روی مقدار مح بلاواسطه سایر استخراج شوند

ط = ۱
س = ۷
ز = ۲
ه = ۵
ی = ۳

* ۹۹– مثال ۲– در حل معادلات حرفی ذیل است

(۱) $ax+by=c$

(۲) $a'x+b'y=c'$

از معادلهٔ اول این تساوی (۳) $x=\frac{c-by}{a}$

و از دوم $x=\frac{c'-b'y}{a'}$

و از اینجا این معادله $\frac{c-by}{a}=\frac{c'-b'y}{a'}$

$$c-by=\frac{ac'-ab'y}{a'}$$

$$ca'-ba'y=ac'-ab'y$$

$$ab'y-ba'y=ac'-ca'$$

$$y(ab'-ba')=ac'-ca'$$

$$y=\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}$$

و معادله (۳) چنین بود $x=\frac{c-by}{a}$

یا $x=\frac{c}{a}-\frac{by}{a}$

و چون مقدار y را در تعبیر آخری قرار دهیم مقدار x چنین شود

$$x=\frac{c}{a}-\frac{b}{a}\left(\frac{ac'-ca'}{ab'-ba'}\right)$$

$$x=\frac{c}{a}-\frac{abc'-bca'}{a^2b'-aba'}$$

و چون عمل تفریق را موافق ۵۹ مجری داریم چنین میشود

$$x=\frac{c}{a}+\frac{-abc'+bca'}{a^2b'-aba'}$$

وچون دو جمله کسر $\frac{c}{a}$ را ضرب کنیم در $ab'-ba'$ بترتیب این معادلات حاصل شود

$$x=\frac{c(ab'-ba')}{a(ab'-ba')}+\frac{-abc'+bca'}{a^2b'-aba'}$$

$$x=\frac{acb'-bca'}{a^2b'-aba'}+\frac{-abc'+bca'}{a^2b'-aba'}$$

$$x=\frac{acb'-bca'-abc'+bca'}{a^2b'-aba'}$$

$$x=\frac{acb'-abc'}{a^2b'-aba'}$$

$$x=\frac{a(cb'-bc')}{a(ab'-ba')}$$

$$x=\frac{cb'-bc'}{ab'-ba'}$$

* ۱۰۰ – تنبیه – هر دستگاهی که مشتمل باشد بر دو معادله درجه اول دو مجهولی بعد از آنکه مخارجش رفع شد همواره بشکل همین دو معادله (۱) و (۲) در آید و بعلاوه چون مقادیر a و b و c و a' و b' و c' باقتضای حالات توانند مثبت بود یا منفی معلوم میشود که دو دستوری که برای x و y یافتیم کلیت دارند و بنابراین جاری شوند در حل هر دستگاهی که مشتمل باشد بر دو معادلهٔ دو مجهولی

وعلاوه بران گوئیم که این دو دستور را هر وقت خواهیم توان بسهولت تشکیل نمود بی آنکه محتاج شویم باعمالی که از روی قانون اخراج مجهولات پیش آمدند و نکتهٔ تسهیل عمل اینست که برای نمایش مقادیر معلومه مادر هر دو

معادله یک رشته حروف اختیار نمودیم چرا که در معادلهٔ دوم محض تمیز علامتی رفع
با نهادادیم و می بینیم که مخرج در هر دو تعبیر x و y یکیست و تشکیل آن بر این
وجه است که دو جملهٔ ab و ba را بفاصلهٔ یک علامت –
دنبال هم بنویسیم و حرف دوم هر جمله را یک علامت رفع بزنیم تا چنین شود
$ab' - ba'$ و امّا صورت کسر را از روی مخرج در آوریم و برای مقدار x
هر جا a و a' است بدل کنیم به c و c' تا چنین شود

$$x = \frac{cb' - bc'}{ab' - ba'}$$

و برای y حرف b و b' را بدل کنیم به c و c' تا چنین شود

$$y = \frac{ac' - ca'}{ab' - ba'}$$

* ١٠١ – و حال از روی این دو دستور دو دستگاه معادلهٔ ذیل را حل میکنیم

اولا

$$3x - 2y = 5$$
$$7x + 5y = 31$$

در اینحالت $a = 3$ و $b = -2$ و $c = 5$ و $a' = 7$ و $b' = 5$ و $c' = 31$ است از اینجا

$$x = \frac{5 \times 5 - (-2 \times 31)}{3 \times 5 - (-2 \times 7)} = \frac{25 + 62}{15 + 14} = \frac{87}{29} = 3$$

$$y = \frac{3 \times 31 - 5 \times 7}{29} = \frac{93 - 35}{29} = \frac{58}{29} = 2$$

ثانیا

$$\frac{x}{4} + 3y = 16$$
$$y - \frac{2x}{3} = 1$$

و بعد

وبعد از رفع مخارج چنین شود

$$x + 18y = 96$$
$$3y - 2x = 3$$

در این مثال $a = 1$, $b = 18$, $c = 96$

$a' = -2$, $b' = 3$, $c' = 3$

و بنابراین

$$x = \frac{96\times3 - 18\times3}{1\times3 - (18\times-2)} = \frac{96-18}{1-(6\times-2)} = \frac{78}{1+12} = \frac{78}{13} = 6$$

$$y = \frac{1\times3 - (96\times-2)}{1\times3 - (18\times-2)} = \frac{1-(32\times-2)}{1-(6\times-2)} = \frac{1+64}{13} = \frac{65}{13} = 5$$

در اخراج مجهول بعمل تحویل و اختصار

۱۰۲- در حل دستگاه دو معادله دو مجهولی قاعدهٔ تحویل را زیاد استعمال کنند خاصه وقتیکه یکی از مجهولات را در هر دو معادله یک معتبر یا ضریب باشد (کوئفیسیان) دراینصورت همین قدر کافی است که این دو معادله را عضو بعضو جمع کنند و یا تفریق نمایند (۵۴ ثانیاً) موافق آنکه مجهول بیرون کردنی را علامت در دو معادله مخالف باشد یا موافق

و حال این قاعده را در دو معادلهٔ ذیل مجری داریم

$$x + y = 22$$
$$x - y = 8$$

برای

برای بیرون کردن y عضو بعضو جمع میکنیم میشود

$$x + y + x - y = ۲۲ + ۸$$
$$۲x = ۳۰$$
$$x = ۱۵$$

واگر مقدار y مطلوب باشد معادلهٔ دوم را از اوّل موضوع میکنیم تا چنین شود

$$x + y - x + y = ۲۲ - ۸$$
$$۲y = ۱۴$$
$$y = ۷$$

۱۰۳ – تنبیه – بندرت اتفاق افتد که چنین دو معادلهٔ ساده ما را پیش آید اما بی زحمت میتوان یکی از دو مجهول را در هر دو معادله صاحب یک مبین نمود پس یکی از دو معادله یا هر دو را در مقام لزوم ضرب کنند در عددی شایسته وآن عدد را زود بدست آید چنانچه در امثلهٔ ذیل دیده میشود

۱۰۴ – مثال – این دو معادله را حل کنید

$$۲x + y = ۷$$
$$۵x - ۳y = ۱$$

چون جمیع جمله‌های معادلهٔ اوّل را در ۳ ضرب کنیم و بدوّمی نزدیک نمائیم چنین میشود

$$۶x + ۳y = ۲۱$$
$$۵x - ۳y = ۱$$

و چون عضو بعضو برهم اضافه کنیم چنین میشود

$$11x = 22$$
$$x = 2$$

و از روی مقدار y چنین میشود $y = 3$

۱۰۵ – مثال ۲ – در حل این دو معادله

$$3x + 2y = 16$$

$$7x + 8y = 44$$

برای خارج کردن y از هر دو معادله ضرب میکنیم دو عضو اولی را در ۴ تا چنین شود

$$12x + 8y = 64$$

و دومی را عضو بعضو از آن تفریق میکنیم تا چنین شود

$$5x = 20$$
$$x = 4$$

۱۰۶ – مثال ۳ – در حل این دو معادله

$$7x + 2y = 31$$

$$5x + 3y = 30$$

چون جمله های اولی را در ۳ ضرب کنیم و از دومی در ۲ چنین شود

$$21x + 6y = 93$$

$$10x + 6y = 60$$

و چون در هر دو معادله y را یک مبین است دومی را از اولی تفریق کنیم

تا x بدست آید

$$11x = 33$$
$$x = 3$$

و از

وازروی این مقدار x استخراج میشود $y = 5$

۱۰۷ - تنبیه = هرگاه بخواهیم مجهول در هردو معادله صاحب یک معتبر گردد باید بدستور مثال مذکور رفتار نمود یعنی جمیع جمله های معادلهٔ اول را ضرب نمود در معتبری که این مجهول در معادلهٔ دوم دارد و بعکس آن جمله های دوم را ضرب نمود در معتبر همان مجهول در معادلهٔ اول اما هنگام عمل درهمین قاعده هم تفریقاتی میشود چنانچه در ن ۱۰۵ دیدید

۱۰۸ - حالا دستگاه چهار معادله پیش میآوریم تا معلوم شود که قاعدهٔ نحوهٔ کلیست و بهر قدر معادلات بخواهیم تعلق گیرد

$$(1) \quad x + y - z + 2u = 8$$

$$(2) \quad x - y + 2z + u = 9$$

$$(3) \quad -x + 2y + z - u = 2$$

$$(4) \quad 2x + y + z + u = 11$$

در حل این دستگاه ابتدا یک مجهول را از میان دو معادله (۱) و (۲) بیرون میکنیم و بعد همان مجهول را میان (۲) و (۳) و بالجمله همان میان (۳) و (۴) و آنوقت زیاده از سه معادله نداریم و در اثنا همان معامله را بعینه باید نمود چون معادلهٔ (۱) را با (۲) عضو بعضو

جمع

جمع کنیم z خارج میشود و باز میماند

(۵) $2x + y + 3z = 17$

و برای اخراج z از میان معادله (۲) و (۳) جمله های (۲) را

ضرب میکنیم به ۲ و با (۳) عضو بعضو جمع میکنیم چنین میشود

(۶) $x + 5y + z = 20$

و بالجمله چون جمله های معادله (۴) را در ۲ ضرب کنیم و معادله (۳) را

از آن تفریق کنیم حاصل میشود

(۷) $5x + y + 3z = 20$

پس تعبیرات (۵) و (۶) و (۷) دستگاهی شود باینصورت

(۵) $2x + y + 3z = 17$

(۶) $x + 5y + z = 20$

(۷) $5x + y + 3z = 20$

و چون جمیع جمله های معادله دوم را در ۳ ضرب کنیم چنین شود

(۸) $3x + 15y + 3z = 60$

و چون دو معادله (۵) و (۷) را عضو بعضو از این اخری تفریق کنیم

چنین شود (۹) $x + 14y = 43$

$-2x + 14y = 40$

وحال

دحال علی باقی نیست جز تفریق معادلهٔ دوم از اول تا چنین شود

$$۳x = ۳$$

$$x = ۱$$

مقدار x را چون در معادله ۹ گذاریم میشود $z = ۳$

این دو مقدار را چون در معادلهٔ (۸) گذاریم چنین میشود

$$y = ۴$$

امثلهٔ مشق

معادلات ذیل را حل کنید

۱۰۰ $\begin{cases} ۴x - ۵y = ۲ \\ ۵x + ۳y = ۲۱ \end{cases}$

۱۰۱ $\begin{cases} ۲x + ۴y - ۳ = ۵ \\ ۷x - ۲y + ۴ = ۱۶ \end{cases}$

۱۰۲ $\begin{cases} \frac{۵x - ۳}{۴} + ۳y = ۱۲ \\ \frac{۷x}{۴} + y - \frac{۱}{۲} = ۹,۵ \end{cases}$

۱۰۳ $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$

۱۰۴ $\begin{cases} ۲x + ۳y - z = ۵ \\ ۵x - ۴y + ۲z = ۳ \\ ۷x - y + ۳z = ۱۴ \end{cases}$

۱۰۵

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases}$$

۱۰۶

$$\begin{cases} x + y = a \\ y + z = b \\ x + z = c \end{cases}$$

۱۰۷

$$\begin{cases} y + z + t + u = 10 \\ y - z - 2t + 3u = 11 \\ x + 3z - 2u = 3 \\ 4z - u = 4 \\ x - u = 1 \end{cases}$$

مسائل چند

۱۰۹- مسئلهٔ ۱- میخواهیم دو عدد بدست آوریم چنانچه اگر مضاعف دوّمی را بر اوّلی بیفزائیم بشود ۲۰ و تفاضل ما بین ۳ برابر اوّلی و $\frac{1}{4}$ دوّمی بشود ۱۰

اندو عدد را x و y فرض میکنیم پس از روی صورت سؤال این دو معادله تشکیل شود

$$x + 2y = 20 \qquad (1)$$

$$3x - \frac{y}{4} = 10 \qquad (2)$$

چون در دو طرف مخرج ۲۴ را رفع کنیم چنین میشود

$$۱۲x - y = ۴۰$$

و چون جملهای آنرا در ۲ ضرب کنیم چنین میشود

$$(۳) \quad ۲۴x - ۲y = ۸۰$$

و چون دو معادلهٔ (۱) و (۳) را عضو بعضو جمع کنیم چنین شود

$$۲۵x = ۱۰۰$$

$$x = ۴$$

و چون مقدار x را در معادلهٔ (۱) نقل کنیم چنین شود

$$y = ۸$$

و آن هم بسهولت تحقیق شود

۱۱۰ ـ مسئلهٔ ۲ ـ دو مبلغ نسبت بهم مثل ۵ است به ۴ و جملتان در مرابحه مبلغ ۱۲۶۲٫۴۵ قران سود داده و در این طور که مبلغ بزرگتر از قرار صدی ۳ بوده و کوچکتر صدی ۵ حال مطلوب است قدر آنها فرض کنیم x و y آن دو مبلغ باشد که صد قران از اولی ۳ قران ربح داده پس قرانش صد یک سود بدهد یعنی $\frac{۳}{۱۰۰}$ و x قرانش x مرتبه بیشتر یعنی $\frac{۳x}{۱۰۰}$ و بهمین دلیل برای مبلغ y حاصلش میشود $\frac{۵y}{۱۰۰}$ و چون جمع این دو مبلغ باید بشود ۱۲۶۲٫۴۵ قران پس این تساوی حاصل است

$$\frac{3x}{100} + \frac{5y}{100} = 1262{,}45$$

بلحاظ دیگر از صورت مسئله این تساوی نتیجه شود

$$\frac{x}{y} = \frac{5}{4}$$

وچون مخارج را از هر دو معادله خارج کنیم چنین شود

$$3x + 5y = 126245$$

$$4x = 5y$$

پس بموجب معادله دوم در معادله اول بجای $5y$ میگذاریم $4x$ چنین میشود

$$3x + 4x = 126245$$

$$7x = 126245$$

$$x = 18035$$

وچون مقدار x را در معادله دوم نقل کنیم چنین میشود

$$4 \times 18035 = 5y$$

پس $y = 14428$

۱۱۱ـ مسئله ۳ ـ سرکه داریم پیمانه ۴۵ر قران قیمت دارد و سرکه دیگر ۵۶ر قران میخواهیم طوری ممزوج کنیم که پیمانه ۵۰ر بیرزد ۴۰۰ پیمانه لازم است از هرکدام چند عدد بگیریم

فرض کنیم x و y عدد پیمانه‌های ۴۵ر قرانی و ۵۶ر قرانی باشد

پس قیمت ممزوج میشود x مرتبه ۰ر۴۵ قران یا ۰ر۴۵ x بعلاوه y
مرتبه ۰ر۶۵ قران از لحاظ دیگر میدانیم که قیمت ۶۰۰ پیمانه باید معادل شود
با ۶۰۰ برابر ۰ر۵۰

پس این دو فقره قیمت باید معادل شود باین صورت

$$0{,}45\,x + 0{,}65\,y = 600 \times 0{,}50 \qquad (1)$$

و چون باید x پیمانه اولی با y پیمانه دومی جمعاً بشود ۶۰۰ پیمانه چنین شود

$$x + y = 600 \qquad (2)$$

و چون جمله های اولی را در ۱۰۰ ضرب کنیم و بعد بر ۵ قسمت کنیم چنین شود

$$9x + 13y = 600 \times 10$$

و چون جمیع جمله های دومی را در ۹ ضرب کنیم چنین شود

$$9x + 9y = 5400$$

و چون آنرا از معادلهٔ سابق تفریق کنیم چنین شود

$$4y = 600$$

$$y = 150$$

و چون y را در معادلهٔ (۲) نقل کنیم چنین شود

$$x = 450$$

پس ۱۵۰ پیمانه ۰ر۶۵ قرانی چون ممزوج شود با ۴۵۰ پیمانه

۵ گرم دارائی میشود ۵۰ فرانک پس ۵ گرم فرانک

۱۱۲ - مسئله ۴ - دو شمش نقره داریم یکی بعیار ۹۵۰ ر و دیگری بعیار ۸۰۰ ر چقدر از هر یک از آنها ترکیب کنیم که ۴ کیلوگرم حاصل شود بعیار رسمی دولتی ۹۰۰ ر

۱۱۲ - این مسئله از نوع سابق است و عده کیلوگرمهای را که باید از دو عیار ۹۵۰ ر و ۸۰۰ ر گرفت فرض میکنیم x و y یک کیلوگرم از شمش اول دارای ۹۵۰ گرم نقره خالص است پس x کیلوگرم دارای x برابر ۹۵۰ گرم میشود یعنی ۹۵۰x و همچنین یک کیلوگرم از شمش دومی چون شامل ۸۰۰ گرم نقره خالص است در y کیلوگرم مقدار y برابر ۸۰۰ گرم نقره باشد یعنی ۸۰۰y

اما شمش ۴ کیلوئی که میخواهیم بعیار ۹۰۰ ر تحصیل کنیم نقره خالصش میشود ۹۰۰×۴ گرم و چون کیلوهائی که میخواهیم از دو قسم شمش بر داریم در عیار ۹۵۰ ر و ۸۰۰ ر نقره خالصشان باید بهمان اندازه باشد که ۴ کیلو در عیار ۹۰۰ ر دارد پس این معادله تشکیل شود

$$۹۵۰x + ۸۰۰y = ۴ \times ۹۰۰$$

و چون x کیلو از یکی برداشتیم و y از دیگری و مجموع باید ۴ کیلو بشود این معادله دیگر تشکیل شود $x + y = ۴$

وچون

وچون این دو معادله را حل کنیم مقدار x و y چنین شود

$$x = 4$$
$$y = 2$$

۱۱۴ - مسئله ۵ - ترکیبی داریم از مس و قلعی بوزن ۸۰ کیلو در هوا و ۷۰ کیلو در آب و میخواهیم بدانیم که از هر کدام چند کیلو دارا است بنابر آنکه بدانیم کثافت مس ۸٫۹ است و کثافت قلعی ۷٫۳

پس عدد کیلوهای این دو فلز را در جزء ترکیب x و y فرض میکنیم تا این معادله حاصل شود

$$x + y = 80$$

واما معادله دوم را باید بمنفعت این نکته شد که هرگاه بگوئیم جسمی را کثافت ۸٫۹ است منظور این است که در محاذ حجم وزنش ۸٫۹ برابر وزن آب است وازاین قرار یک دسیمتر مکعب مس را وزن در هوا ۸٫۹ کیلو است و حال آنکه وزن همین قدر حجم آب خالص (در چهار درجه فوق صفر) زیاده بر یک کیلو نیست اما موافق قانون ارشمیدس چون یک دسیمتر مکعب مس را در آب وزن کنیم بقدر ۱ کیلو از وزنش کسر میکند و بنابراین زیاده از ۷٫۹ کیلو وزن ندارد حال میتوانیم گفت که اگر در … ۸٫۹ کیلو مس که در آب وزن شود ۱ کیلو کسر نماید پس ۱ کیلو چه قدر کسر میکند ابتست $\frac{1}{8.9}$ یا $\frac{10}{89}$ و در x کیلو میشود x مرتبه بیشتر یعنی $\frac{10x}{89}$ و چون همین عمل را در قلعی جاری کنیم معلوم میشود که اندازه کسر y کیلو از این فلز که در آب

وزن

وزن شود چنین میشود $\frac{10y}{7,3}$ و چون کسر جمع دو فلز یعنی کل آن ترکیب که در آب وزن شود شده بود ۱۰ کیلو پس این تساوی دیگر تشکیل شود

$$\frac{10x}{89} + \frac{10y}{7,3} = 10 \qquad (2)$$

و چون جمیع جمله ها را بر ده قسمت کنیم چنین شود

$$\frac{x}{89} + \frac{y}{73} = 1 \qquad (3)$$

و حل دو معادله (۱) و (۳) چنین نتیجه دهد

$x = ۳۸،۹۳۷۵$ کیلو

$y = ۱۴،۰۴۲۵$ کیلو

۱۱۴ — مسئلهٔ ۴ — سه نفر میخواهند ملکی بشراکت خریداری کنند بمبلغ ۸۰۰۰ تومان و اولی بتنهائی از عهدهٔ ادای این وجه برمی‌آمد اگر میداشت $\frac{1}{5}$ مایملک دومی و $\frac{1}{2}$ مایملک سیمی و ۱۵۰۰ تومان علاوه را اما شریک دوم اگر بخواهد تنها از عهدهٔ این وجه برآید کسر دارد بقدر $\frac{1}{3}$ سهم اولی و $\frac{1}{8}$ سهم سیمی و ۷۵۴ تومان علاوه دیگر و اما شریک سیم مقبول نشد تنها از عهدهٔ این وجه برآید اگر علاوه میداشت بقدر $\frac{1}{9}$ سهم اولی و $\frac{1}{10}$ دومی را حال مطلوب قدر استطاعت هر کدام برای خریداری ملک

پس سرمایهٔ اولی را x و دومی را y و سیمی را z فرض میکنیم آن وقت

اندوی بیان مسئلهٔ این سه معادله ترکیب شود

$$x + \frac{y}{5} + \frac{z}{7} + 1500 = 8000$$

$$y + \frac{x}{4} + \frac{z}{5} + 475 = 8000$$

$$z + \frac{x}{9} + \frac{y}{10} = 8000$$

وبعد از مقابله و رفع مخارج چنین شوند

$$35x + 7y + 5z = 227500$$

$$20y + 5x + 4z = 150500$$

$$90z + 10x + 9z = 720000$$

وحل آنرا بعهدهٔ شاگرد میگذاریم در آخر بیرون آید

$$x = 4500$$

$$y = 500$$

$$z = 700$$

١١٥ ـ تنبیه ـ این نکته خارج از قد کتاب است اگر بگوییم که جمیع مسائل دو مجهولی را توان به یک معادله حل نمود فرض انوقت نوشته است که صورت مسئله باین شکل درآید

$$(1) \quad x + y = a$$

یا باین شکل $$(2) \quad x - y = d$$

یعنی در معادلهٔ (١) جمع دو عدد نموده شده و اگر یکی را x فرض کنیم دیگر

دیگر میشود آن مجموع سهمهای x بالخصوص $x - a$

در معادلهٔ دوم که تفاضل دو عدد است اگر یکی را x فرض کنیم دیگری آن تفاضل میشود بعلاوه x یعنی $x + a$ بازروی این نکته میتوان مسائل ۳ و ۴ و ۵ را بیک مجهول و یک معادلهٔ اوّل حل نمود

مثلا در مسئلهٔ سیم میگفتیم چون x پیمانه از قرار ۰٫۴۵ قران باشد $x - 600$ پیمانه میشود از قرار ۰٫۶۵ قران آنوقت این معادله حاصل میشد

$$0.45x + 0.65(600 - x) = 600 \times 0.50$$

که زیاده از یک مجهول ندارد

مسائل حل نمودنی

۱۰۸ – علافی یک نوبت خریداری نمود ۱۵۰ کیل گندم و ۶۴ کیل جو را بمبلغ ۳۶۴ قران نوبت دیگر ۲۰۰ کیل گندم و ۱۶۰ کیل جو را بمبلغ ۵۶۰ قران پس قیمت هر کیل از جو و گندم چیست

۱۰۹ – دو مبلغ برابر که رفته عایدی جمع هردو این است در سال ۵۴۰ تومان یکی از قرار صد ۵ و دیگر صد ۳ مطلوب است مبلغ سرمایه بنا برآنکه بدانیم عایدی اولی بمبلغ ۳۶۵ قران زیاده بر فائدهٔ دومی است

۱۱۰ – عددی داریم مرکب بعشرات و آحاد که جمع دو رقمش ۷ است و چون معکوس کنیم مراتب آن دو عشرات را عددی تازه ترکیب میشود سه برابر

برابر اولی بعلاوه ۱۳

۱۱۱ – سه عدد میخواهیم که مجموع اولی و دومیش میشود ۴۴ و مجموع اولی و سیمی ۳۹ و مجموع دوم و سیم میشود ۴۳

۱۱۲ – سه طفل را هر کدام چند عدد گردو دست سهم اولی و دومی روی هم میشود ۵۵ و اولی چون با سیمی جمع شود میشود ۴۵ گردو و خلاصه دومی و سیمی اگر بر روی هم بریزند میشود ۶۰ عدد پس عدد گردوهای هر طفل چه قدر است

فصل دهم

در مجذور و جذر مقادیر جبری

۱۱۶ – مجذور مقداری عبارت است از حاصل ضرب آن مقدار در نفس خویش و چون قواعد ضرب را در دست داریم تشکیل مجذور هر مقدار آسان باشد

۱۱۷ – و در اینجا برای مشق مجذورات منمها و پلنمهای مختلف چند تا بنمائیم

نتایج	مقادیر مجذور کردنی
$a \times a = a^2$	اول a مجذورش اینست
$-a \times -a = a^2$	دوم $-a$
$(4a^2b^2c)^2 = 4a^2b^2c \times 4a^2b^2c = 16a^4b^4c^2$	سیم $4a^2b^2c$
$\left(\frac{a}{b}\right)^2 = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} = \frac{a^2}{b^2}$	چهارم $\frac{a}{b}$
$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2+2ab+b^2$	پنجم $a+b$

نشنه

ششم $a-b$ ...... $(a-b)^2=(a-b)(a-b)=a^2-2ab+b^2$

هفتم $x+\frac{p}{2}$ .... $(x+\frac{p}{2})^2=(x+\frac{p}{2})(x+\frac{p}{2})=x^2+px+\frac{p^2}{4}$

هشتم $x-\frac{p}{2}$ .... $(x-\frac{p}{2})^2=(x-\frac{p}{2})(x-\frac{p}{2})=x^2-px+\frac{p^2}{4}$

نهم $x+3$ ..... $(x+3)^2=(x+3)(x+3)=x^2+6x+9$

دهم $4a-3b$ ... $(4a-3b)^2=(4a-3b)(4a-3b)=16a^2-24ab+9b^2$

نتایجی که ازاین امثله استنباط میشود اینست

اوّلا - مجذور منّی که با علامت + باشد یا علامت - همواره منّی است مثبت

ثانیا در رسانیدن منّی بمربع باید هر عاملش را جدا بمربع رسانند وبنابراین در هر جمله باید معبّرها (کوئفیسیان) مجذور و رموز در درجه مبتنی را (اکسپوزان) مضاعف نمود

ثالثا مجذور هر کسر کسری دیگر است که صورت و مخرجش مجذور صورت و مخرج کسر مفروض باشند

رابعا مجذور جملتین میشود سه جمله مشتمل بر مجذور جملهٔ اوّل و مضاعف حاصل جملهٔ اوّل در دوّم (یا دوّم در اوّل) و مجذور جملهٔ دوّم و از میان این سه جمله همیشه جملهٔ اوّل و سیّم مثبت اند و جملهٔ دوّم وقتی منفی میشود که دو جمله از جملتین مفروض مابین علامت عکس باشند

خامسا

خامساً - چون مجذور یک جمله همیشه یک جمله است و مجذور جملتین سه جمله است لازم میاید که جملتین هرگز مجذور تام نشود

۱۱۸- تنبیه - اگرچه جملتین هرگز مجذور کامل نمیشود اما بسا اتفاق افتد که بتوان آنرا جزو مجذوری نمود مثلاً جملتین $a^2 + b^2$ که دو جمله‌اش جدا جدا مجذورند تواند جزو سه جمله مجذوری واقع شود چراکه اگر بر آن اضافه کنیم $2ab$ را با علامت مثبت + افزوده چنین شود

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ واگر با علامت - باشد چنین میشود $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

هرگاه بخواهیم این جملتین را $x^2 + 6x$ جزو سه جمله مجذوری قرار دهیم جمله $6x$ را چنین تصور میکنیم که مضاعف حاصل ضرب جمله دوم باشد در اولی و بنابراین جمله دوم باید ۳ باشد و مجذورش ۹ و چون آنرا بر جملتین مفروض اضافه کنیم حاصل شود این سه جمله مجذور کامل

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

همچنین جملتین $x^2 + px$ را چون تحویل کنیم به جمله مربع چنین شود $x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ زیراکه px را چون توان مضاعف حاصل ضرب جمله دوم در اول انگاشت ازین قرار جمله دوم میشود $\frac{p}{2}$ و مجذورش میشود $\frac{p^2}{4}$

و بعد از انکه تنبیه مذکور را خوب دریافتید در حل معادلات یك مجهولی در درجهٔ دوم اشکالی باقی نمیماند

و چنین عمل افزودن جمله را بر جملتین چنانچه یک سه جمله بدست آید مجذور کامل بتکمیل مجذور گوییم

در استخراج جذر مقادیر جبریه

۱۱۹— جذر هر مقدار مقداری دیگر است که چون ضرب شود در نفس خویش عاید کند همان مقدار مفروض را مثلا جذر $س^{۲}$ اینست $+س$ یا $-س$ چراکه $+س \times +س = س^{۲}$ و $-س \times -س$ نیز میشود $+س^{۲}$ و از روی این مثال ها چنین معلوم میشود که هر جذر صاحب دو علامت شود یکی مثبت دیگری منفی و لهذا چنین نویسند $\sqrt{س^{۲}} = \pm س$ (و چنین تلفظ کنید که جذر $س^{۲}$ مساویست با بعلاوه س یا منهای س)

و چون در خصوص علامت جذر مقداری مردد شویم که کدام یک را باید دارا شود گوییم ذو وجهین است

۱۲۰— بعد از ترقی دادن دو جمله و سه جمله بدرجهٔ مجذور قواعد ذیل در مسئلهٔ جذر استنباط شود

۱۲۱— دستور برای یك جمله — اینست که جذر معتبر را بگیریم و در جذر هر حرف را نصف کنیم و حاصل را با این دو علامت $\pm$ بنویسیم

وبنابراین قاعده جذر ۱۶ س^{۶} ک^{۴} ر^{۲} چنین میشود

$\sqrt{\text{۱۶ س}^{۶}\text{ک}^{۴}\text{ر}^{۲}}$ = ± ۴ س^{۳} ک^{۲} ر زیراکه چون این جذر را مجذور کنیم بعینه مقدار مفروض بدست آید

۱۲۲ — تنبیه ۱ — چون مجذور یک جمله همیشه مثبت است معلوم میشود که یک جمله منفی هرگز نتواند مجذور باشد

تنبیه ۲ — هر یک جمله باانکه مثبت باشد نتواند مجذور تام باشد اگر معتبرش مجذور تام نباشد یا درجهٔ هر حرفش زوج نباشد

۱۲۳ — هر مقدار را اگر بتوان ضلعی درست ازان استخراج نمود منطق گوئیمش و اگر نتوان اصم گوئیم مثلا ۸ را چون بتوان کعب حقیقی ازاو گرفت مقدار منطق گوئیم و ۲ را مقدار اصم گوئیم چون نمیتوان هیچ ضلع حقیقی ازاو گرفت و همچنین س و ک^{۳} س از جملهٔ مقادیر اصم اند

۱۲۴ — و جذر مقدار اصم همین است که آنرا در زیر رادیکال قرارش دهند مثلا $\sqrt{\text{س}}$ علامت جذر س است

۱۲۵ — تنبیه ۳ — چون مجذور $\sqrt{\text{س}}$ همین خود س است معلوم میشود که بالا بردن رادیکالی بمجذور همین است که علامت رادیکال را از سرش برداریم

۱۲۶- بسیار اتفاق میافتد موقع مختصر نمودن مقداری اصم مثلاً اگر میخواستیم جذر این مقدار را بگیریم ل² س ع بایست جذر هر عاملی را بترتیب گرفت تا چنین شود √۴ س² ل = √ع × √س² × √ل = ۲ س √ل

و چون همین مقدار اخیر را مجذور کنید ملتفت میشوید که آن درست جذر عدد مفروض است

از روی این مثال چنین معلوم میشود که مقادیر اصم را میتوان مختصر نمود بانکه عاملهای مجذور را از زیر رادیکال بیرون کشیم پس اگر بخواهیم جذر مقداری اصم را بگیریم میبایست آنرا تجزیه کنیم بعاملهای چند که بعضی مجذورات تام باشند و بعد جذر هر عاملی را جدا بگیریم مثلاً اگر بخواهیم جذر این مقدار را بگیریم ۲ ی ل⁵ س ۷۲ چنین مینویسیم

√۷۲ س⁵ ل ی² = √۳۶ س⁴ ل ی² × ۲ س ل = ۶ س² ی √۲ س ل

و بالعکس هر وقت بخواهیم مقادیری چند را زیر رادیکال ببریم میبایست ابتدا آنها را مجذور نمود

مثلاً

۲ س √ل = √۴ س² ل

۱۲۷- تنبیه - جذر هر یک جمله منفی مثل ۲ س - را موهوم گوئیم چرا که هیچ مقداری نتوان یافت که چون در نفس خود ضرب شود نتیجه دهد آن مقدار منفی ۲ س - را

۱۲۸- دستور جذر کسر - در استخراج جذر قاعده اینست

که جذر صورت و جذر مخرج را جدا جدا بگیریم

بنابراین جذر این کسر $\frac{4a^2b^4c^6}{9a^4b^2c^4}$ چنین میشود

$$\sqrt{\frac{4a^2b^4c^6}{9a^4b^2c^4}} = \frac{\sqrt{4a^2b^4c^6}}{\sqrt{9a^4b^2c^4}} = \frac{2ab^2c^3}{3a^2bc^2}$$

چراکه اگر کسر ثانی را مجذور کنیم همان کسر مفروض عاید میشود و آنچه در خصوص

یک جمله گفتیم تمام تعلق گیرد بکسور

۱۲۹- دستور جذر سه جمله - هرگاه جذر دو تمام باشد اینست

که مختصرا جذر دو جمله طرفین را جدا جدا بگیریم و بهمان علامت

مضاعف حاصل ضرب از هر یکی جداشان سازیم

این دستور را در استخراج جذر سه جمله‌های ذیل جاری میکنیم

سه جمله‌های مفروض		جذر آنها
اول	$a^2 + 2ab + b^2$ ...	$\sqrt{a^2+2ab+b^2} = a+b$
دوم	$a^2 - 2ab + b^2$ ...	$\sqrt{a^2-2ab+b^2} = a-b$
سیم	$x^2 + px + \frac{p^2}{4}$ ...	$\sqrt{x^2+px+\frac{p^2}{4}} = x+\frac{p}{2}$
چهارم	$x^2 - px + \frac{p^2}{4}$	$\sqrt{x^2-px+\frac{p^2}{4}} = x-\frac{p}{2}$
پنجم	$16a^2 + 16ab + 4b^2$ ..	$\sqrt{16a^2+16ab+4b^2} = 4a+2b$
ششم	$x^2 - 6x + 9$	$\sqrt{x^2-6x+9} = x-3$

... دستور این نتایج همین است که جذرها را مجذور نمایند تا ببینند که همان چند جمله معروض عاید میشود مثلاً $گ + س$ چون مجذور شد میشود $گ^2 + ۲گس + س^2$ و $گ - س$ میشود $گ^2 - ۲گس + س^2$ و هکذا

۱۳۰ — تنبیه — چون دو جمله‌ئی ها مجذور تام نمیشوند لازم نیست تحمّل زحمت استخراج ضلع باید مختصراً آنها را زیر رادیکال نوشت مثلاً جذر $گ^2 + س^2$ همین است $\sqrt{گ^2 + س^2}$

فصل یازدهم

در حل معادلات درجه دوم

۱۳۱ - دستور کلّی معادله درجه دوم یک مجهولی - هرگاه جمیع جمله‌ها نسبت به x صحیح باشند یکسر معادله درجه دوم یک مجهولی نمی‌تواند زیاده از سه نوع جمله دارا باشد

اوّل جمله‌های صاحب x^2 دوّم جمله‌های صاحب x سیّم جمله‌های معلوم

پس اگر جمیع جمله‌های هم نوع را در یک جمله آوریم و تمام را در عضو اوّل قرار دهیم هر معادله درجه دوم باین شکل کلّی درآید

$$س x^2 + گ x + ر = 0 \qquad (1)$$

دائماً مقادیر معلومه س و گ و ر ممکن است مثبت باشند یا منفی و یک جمله باشند یا کثیر الجمله

۱۳۲ – تنبیه – این نکته واضح است که میان چهار مقدار a و b و c و x اقلاً یکی باید منفی باشد چرا که مجموع چند مقدار مثبت معلوم است بزرگتر میشود از صفر مثلاً در چنین معادله

$$x^2 + 8x + 12 = 0$$

البته مقادیر x باید منفی باشند

۱۳۳ – در معادلهٔ تام و معادلهٔ غیر تام – معادلهٔ درجهٔ دوم را تام گوئیم هر وقت بشکل (۱) درآید و غیر تام گوئیم هر وقت جملهٔ صاحب x جایش خالی باشد ($b = 0$) یا جملهٔ معلومه جایش خالی باشد ($c = 0$) یا این هر دو جمله معدوم باشند آنوقت یکی از این سه صورت اتفاق افتد

$ax^2 + c = 0$ و $x^2 + bx = 0$ و $ax^2 = 0$

۱۳۴ – صورت دیگر از معادلهٔ کلی درجهٔ دوم – هرگاه a غیر از صفر باشد میتوان جمیع جمله های معادلهٔ (۱) را بر a قسمت نمود تا چنین شود

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

و هرگاه فرض کنیم $p = \frac{b}{a}$ و $q = \frac{c}{a}$ چنین شود

$$x^2 + px + q = 0 \qquad (۲)$$

پس اگر این معادله غیر تام باشد یکی از سه صورت ذیل را بگیرد

$x^2 + q = 0$ و $x^2 + px = 0$ و $x^2 = 0$

و معادلهٔ

و معادله درجهٔ دوم الضرورت که بیشتر موضوع بحث واقع شود شکل (۲) است

× ۱۳۵ – در حل معادلهٔ غیر تام درجهٔ دوم – اول $x^2 + q = 0$

معادله $x^2 + q = 0$

نتیجه میدهد $x^2 = -q$

و از آنجا (۱۱۹) $x = \pm\sqrt{-q}$

و چون دو علامت رادیکال را از هم جدا کنیم و دو ضلع را x' و x'' فرض کنیم

چنین شود $x' = +\sqrt{-q}$

$x'' = -\sqrt{-q}$

۱۳۶ – مثال این معادله را فرض میکنیم

$x^2 - 16 = 0$

در این حالت $q = -16$

پس $x^2 = 16$

و از آنجا $x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$

و $x' = 4$ و $x'' = -4$

و این دو جواب در اصل معادله صدق کنند زیرا که چنین شوند

$4 \times 4 - 16 = 0$ و $-4 \times -4 - 16 = 0$

و علاوه بر آن هیچ عدد دیگر در آن معادله صدق نکند

۱۳۷

* ۱۳۷- دوم $x^2 + px = 0$

معادله $x^2 + px = 0$

نتیجه میدهد $x(x + p) = 0$

پس عنوان اول این معادله حاصل ضرب دو عامل است و میتوان آنرا یکی

از دو وجه معدوم ساخت باین طور

$$x = 0$$

یا $x + p = 0$

و از دومی چنین نتیجه شود $x = -p$

و از این قرار معادله $x^2 + px = 0$ مفروض صاحب دو جواب است از این قرار

$$x' = 0 \quad و \quad x'' = -p$$

۱۳۸- مثال در این معادله

$$x^2 + 5x = 0$$

در این حالت $p = 5$

پس $x(x + 5) = 0$

و از آنجا $x' = 0$ و $x'' = -5$

و تحقیق هر دو جواب سهل است

* ۱۳۹- سوم $x^2 = 0$

این

این معادله $x^2 = 0$

نتیجه میدهد $x \times x = 0$

و این معادله صدق نکند جز آنوقت که

$$x'' = 0 \quad \text{یا} \quad x' = 0$$

و از این قرار هر دو ضلع معادله صفر میشوند

در حل معادلهٔ تام درجهٔ دوم که باین صورت باشد

$$x^2 + px + q = 0$$

۱۴۰ – سابق (۱۳۴) ذکر شد که شکل کلی

$$ax^2 + bx + c = 0$$

این شکل درآید $x^2 + px + q = 0$

و نظر بآنکه بیانات ما را بهتر ملتفت شوید ابتدا امثال عددی بیاوریم

فرض میکنیم این معادله را $x^2 - 8x + 15 = 0$

و چون ۱۵ را ببریم در عضو دوم چنین شود

$$x^2 - 8x = -15$$

اما ملتفت شوید که $x^2 - 8x$ دو جزء اول مجذور این شکل است

$x - \frac{8}{2}$ یا این شکل $x - 4$ زیرا که

$$(x-4)^2 = x^2 - 8x + 16$$

پس

پس اگر ۱۶ را بر هر دو عضو این معادله

$$x^2 - 8x = -15$$

بیفزائیم چنین شود $x^2 - 8x + 16 = 16 - 15$

و حال عضو اول مجذور این شکل است $x - 4$ چنانچه میتوان نوشت

$$(x-4)^2 = 16 - 15$$

و چون جذر طرفین بگیریم چنین شود

$$x - 4 = \pm\sqrt{1}$$

$$x = 4 \pm 1$$

و چون دو مقدار x را از هم جدا کنیم جوابهای معادلهٔ مفروض چنین شوند

$x' = 4 + 1 = 5$ و $x'' = 4 - 1 = 3$

و تحقیق صحت هر دو آسان است

تحقیق x' $\quad 5\times5 - 8\times5 + 15 = 0$ یا $40 - 40 = 0$

x'' $\quad 3\times3 - 8\times3 + 15 = 0$ یا $24 - 24 = 0$

۱۴۱ — حال این معادلهٔ کلّی را فرض میکنیم

$$x^2 + px + q = 0$$

چون q را در عضو دوم نقل کنیم چنین شود

$$x^2 + px = -q$$

و ظاهر است

[illegible] $\frac{p^2}{4}$ [illegible] است چراکه

$$(x+\frac{p}{2})^2 = x^2 + px + \frac{p^2}{4}$$

پس اگر $\frac{p^2}{4}$ را به هر دو عضو این معادله بیفزائیم $x^2+px=-q$ چنین شود

$$x^2+px+\frac{p^2}{4}=\frac{p^2}{4}-q$$

و حالا عضو اول مجذور این شکل است $x+\frac{p}{2}$ است بطوریکه میتوان چنین نوشت

$$(x+\frac{p}{2})^2=\frac{p^2}{4}-q$$

و چون جذر هر عضو را بگیریم چنین شود

$$x+\frac{p}{2}=\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

و از اینجا

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

این دستور شامل دو جواب است بسبب وجود علامت $\pm$ در جلو رادیکال و بعبارهٔ رسمی چنین ادا شود مجهول معادلهٔ درجهٔ دومی که باین شکل $x^2+px+q=0$ در آمده باشد مساوی است با نصف معتبر x که بعلامت مخالف اختیار شود بعلاوه یا منهای جذر مجذور همین نصف که جملهٔ معلوم از آن موضوع شده باشد

پس بعد از آنکه دو علامت را جدا کنیم دو جواب x' و x'' چنین شوند

$$x'=-\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

$$x''=-\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

حال

حال این دستور را در چند مثال جاری میکنیم

مثال ۱- میخواهیم این معادله را حل کنیم

$$x^2-6x+8=0$$

وازروی دستور چنین شود $x=3\pm\sqrt{9-8}$

$$x=3\pm\sqrt{1}$$

$$x=3\pm1$$

وچون دو مقدار را از هم جدا کنیم

$x'=3+1=4$ $x''=3-1=2$

وبسهولت هر دو تحقیق شود

تحقیق x' $4\times4-6\times4+8=0$ یا $24-24=0$

تحقیق x'' $2\times2-6\times2+8=0$ یا $12-12=0$

مثال ۲- در حل این معادله است

$$x^2+8x+15=0$$

ازروی دستور چنین نتیجه شود

$$x=-4\pm\sqrt{16-15}$$

$$x=-4\pm1$$

وبنابراین آن معادله دو جواب قبول میکند

$x'=-4+1=-3$ و $x''=-4-1=-5$

مثال ۳ – در حل این معادله است

$$9x - x^2 - 20 = 0$$

وبعد از تغییر علامات چنین شود

$$x^2 - 9x + 20 = 0$$

از روی دستور چنین نتیجه شود $x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 20}$

$$x = \frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}}$$

$$x = \frac{9}{2} \pm \frac{1}{2}$$

وچون دو مقدار x را جدا کنیم چنین شود

$x' = \frac{9}{2} + \frac{1}{2} = 5$ و $x'' = \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$

مثال ۴ – در حل این معادله است

$$x^2 + x - 56 = 0$$

وچون معتبر x واحد است از روی دستور چنین شود

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 56}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{225}{4}}$$

$$x = -\frac{1}{2} \pm \frac{15}{2}$$

پس معادله را دو جواب باشد

$x' = -\frac{1}{2} + \frac{15}{2} = 7$ و $x'' = -\frac{1}{2} - \frac{15}{2} = -8$

مثال

مثال ۵ - در حل این معادله است

$$2x^2-12x+16=0$$

و چون جمیع جمله‌ها را بر ۲ قسمت کنیم چنین شود

$$x^2-6x+8=0$$

و از روی دستور چنین شود

$$x=3\pm\sqrt{9-8}$$

و از اینجا $x'=3+1=4$ و $x''=3-1=2$

* ۱۴۲ - در حل معادلهٔ تام درجهٔ دوم که باین شکل باشد .

$$ax^2+bx+c=0$$

چون معادله کلی درجهٔ دوم که باین شکل بود

$$ax^2+bx+c=0$$

منجر شد (۱۳۴) باین شکل $x^2+px+q=0$

و دو ضلع این معادله را استخراج نمودیم چنین شده بود

$$x=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}$$

پس اگر در این دستور p و q را بدل کنیم بدو مقدار خود $\frac{b}{a}$ و $\frac{c}{a}$

دو ضلع معادلهٔ اول بدست میاید یعنی چنین که دارای هر دو ضلع باشد

$$x=-\frac{b}{2a}\pm\sqrt{\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}}$$

و بترتیب

مثال ۲ - در حل این معادله است

$$3x^2-4x-15=0$$

معبّر x چون زوج است دستور دوّم را اختیار میکنیم و آن وقت چنین شود

$$x=\frac{2\pm\sqrt{2^2-(3\times-15)}}{3}$$

$$x=\frac{2\pm\sqrt{4+45}}{3}$$

$$x=\frac{2\pm7}{3}$$

و چون دو ضلع را از هم جدا کنیم چنین شود

$$x'=\frac{2+7}{3}=3 \quad و \quad x''=\frac{2-7}{3}=-\frac{5}{3}$$

۱۴۴ - تنبیه - معادلات درجهٔ دوّم همیشه صاحب دو جواب‌اند که در معادلات مفروضه صدق کنند امّا در مسائل نه چنین است در بعضی حالات زیاده از یک جواب وفق ندهد

مثلاً اگر مطلوب منفعت مبلغی پول باشد یا مدّتی که در ظرف آن باید کاری صورت گیرد در امثال آنها معلوم است جواب منفی مقبول نمیشود و نکته اش ظاهر است

* در روابط میان اضلاع و معبّرهای معادله

۱۴۵ - قضیه - اوّلاً مجموع دو ضلع این معادله

$$x^2+px+q=0$$

مساویست

مساویست با $-p$ و ثانیاً حاصل ضربشان مساویست با q

دلیل فقرهٔ اوّل چون x' و x'' دو ضلع این معادله باشند چنین شود

$$x' = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

$$x'' = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

و چون عضو بعضو بر هم بیفزائیم چنین شود

$$x' + x'' = -p$$

فقره دوم چون همان دو ضلع را در هم ضرب کنیم چنین شود

$$x'x'' = \left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)$$

از عضو دوم این تساوی عبارتست از مجموع دو مقدار $-\frac{p}{2}$ و $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ که ضرب شود در تفاضل آنها پس حاصل ضرب (۳۳ مثال ۳) معادلست با تفاضل دو مربع همان دو مقدار و چون مربع $-\frac{p}{2}$ میشود $\frac{p^2}{4}$ و مجذور $\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$ میباشد $\frac{p^2}{4} - q$ و

بنابراین $x'x'' = \frac{p^2}{4} - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) = \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q$

و از آنجا $x'x'' = q$

۱۴۶ — نتیجه — پس اگر دو ضلع معادله در دست باشد میتوان بلاواسطه آن معادله را تشکیل نمود

اگر مثلاً $x' = 3$ و $x'' = 7$ آنوقت

$$x' + x'' = -p = (3+7) = 10$$

و $$x'x'' = q = 3 \times 7 = 21$$

وبنابراین معادله چنین باشد

$$x^2 - 10x + 21 = 0$$

۱۴۷ - نتیجه ۲ - هرگاه مطلوب باشد معادله درجه دومی که حاصل جمع دو جوابش و حاصل ضربش در دست باشد آن معادله را زود تشکیل کنیم مثلاً اگر مجموع دو عدد جوابهای x' و x'' بوده باشد ۱۶ و حاصل ضرب آنها ۶۳ چنین مینویسیم

$$x' + x'' = -p = 16$$

$$x'x'' = q = 63$$

وبنابراین معادله که دو عدد x' و x'' را بدهد اینست

$$x^2 - 16x + 63 = 0$$

وچون این معادله را حل کنیم چنین شود

$$x = 8 \pm \sqrt{64 - 63}$$

واز اینجا $x' = 8 + 1 = 9$ و $x'' = 8 - 1 = 7$

پس دو عدد مطلوب یکی ۹ است و دیگر ۷ که مجموعشان میشود ۱۶ و حاصل ضربشان ۶۳

۱۴۸- نتیجهٔ ۳ - میتوان علامات دو جواب (که حقیقی فرض شده) معادلهٔ درجهٔ دوم را پیش از وقت بدست آورد

مثلاً در این معادله $x^2 - 11x + 28 = 0$ (۱)

بیک نظر معلوم میشود که علامتها موافق اند چونکه حاصل ضرب آنها ۲۸ عدد مثبت است و بلحاظ دیگر مجموع آنها میشود $-\frac{b}{a}$ — و چون اینجا $-11 = \frac{b}{a}$ معلوم میشود که $11 = -\frac{b}{a}$ — پس هر دو ضلع مثبت اند

حال در این معادله $x^2 + 3x - 40 = 0$ (۲)

اینجا علامات دو ضلع مخالف است چونکه حاصل ضرب آنها منفی است و بلحاظ دیگر مجموعشان میشود $-\frac{b}{a}$ — و چون اینجا $3 = \frac{b}{a}$ معلوم میشود که $-3 = -\frac{b}{a}$ — و بنابراین مجموع دو ضلع منفی است پس آنکه مقدار مطلقش بزرگتر است منفی است

در حل معادلات و مجذورکه مجذورین و مربعین گوییم و معادلات اصم

در حل دستگاه دو معادله که یکیش از درجهٔ اول باشد

۱۴۹- معادلهٔ مربعین معادله است از درجهٔ چهارم که جز قوت زوج مجهول چیزی دارا نباشد و بنابراین چنین معادله را باید باین صورت نوشت

$ax^4 + bx^2 + c = 0$ (۱)

اگر

اگر فرض کنیم $x^2 = z$ توان نوشت $x^4 = z^2$

و چون در معادله بجای x^4 و x^2 قرار دهیم z^2 و z را چنین شود

$$a z^2 + b z + c = 0$$

و این معادله درجه دوم معمولی است و جوابش چنین شود

$$z = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

اما چون $x^2 = z$ پس $x = \pm\sqrt{z}$

و چون مقدار z را زیر رادیکال ببریم چنین شود

$$x = \pm\sqrt{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

از روی این دستور معلوم میشود که x صاحب چهار جواب است دو جواب بحیثیت مقدار مساوی است با دوتای دیگر ولی از حیثیت علامت مخالف است پس معادله مربعین صاحب چهار جواب باشد دوتا برابر دوتا با علامت مخالف

حال این دستور را در معادله ذیل جاری میکنیم

$$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$$

حال چون در دستور سابق بجای حروف را بدل کنیم بمقادیر خود چنین شود

$$x = \pm\sqrt{\frac{25 \pm \sqrt{625 - 4 \times 144}}{2}}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{25 \pm 7}{2}}$$

$$x = \begin{cases} \pm\sqrt{16} = \pm 4 \\ \pm\sqrt{9} = \pm 3 \end{cases}$$

پس هر چهار جواب حقیقی شدند

۱۵۰ - در حل معادلات ستم (در کتب مبسوطهٔ ز معادلات دیگر نیز صحبت میشود مثل معادلات متعاکسه و دو جمله ئی و سه جمله ئی). و آن معادله است که مجهولش در زیر یک رادیکال یا بیشتر مقید شده باشد و از روی مثال ذیل دستور حل این نوع معادلات بدست میاید

$$(1) \quad 2\sqrt{x} - \sqrt{29-x} + 1 = 0$$

و آنرا باین صورت مینویسیم

$$2\sqrt{x} - \sqrt{29-x} = -1$$

و هر دو عضو را مجذور میکنیم چنین میشود

$$4x + 29 - x - 4\sqrt{x(29-x)} = 1$$

و از آنجا

$$-4\sqrt{x(29-x)} = -3x - 28$$

و چون هر عضو را بمربع رسانیم چنین شود

$$16(29x - x^2) = 9x^2 + 784 + 168x$$

و بعد از اختصارات چنین شود

$$(2) \quad 25x^2 - 296x + 784 = 0$$

جواب این معادله چنین شود $x' = 7.84$ و $x'' = 4$
چون دقت کنید معلوم میشود که مقدار x'' تنها در معادلهٔ مفروضه صدق
میکند و اما مقدار ۷ر۸۴ صدق نکند جز در معادلهٔ (۲) چراکه جوابی
است خارجی

۱۵ــ در حل دستگاه دو معادله که یکیش از درجهٔ اول باشد ـ
همیشه میتوان چنین دستگاهی را درست حل نمود
مثال میخواهیم این دستگاه را حل کنیم

$$x^2 + 5xy - 2y^2 + 3x - 22 = 0$$

$$7x - y = 11$$

از معادلهٔ دوم چنین نتیجه شود $y = 7x - 11$
چون این مقدار را در معادلهٔ اول قرار دهیم چنین شود

$$x^2 + 5x(7x - 11) - 2(7x - 11)^2 + 3x - 22 = 0$$

و بعد از اختصارات $62x^2 - 256x + 264 = 0$
و جواب آن معادله اینست $x' = 2\frac{4}{31}$ و $x'' = 2$
و بعد از آن

$$y' = 7 \times 2\frac{4}{31} - 11 = 3\frac{28}{31} \quad \text{و} \quad y'' = 7 \times 2 - 11 = 3$$

و امتحان این هر دو مقدار آسان است

امثله

امثلهٔ مشق در معادلات درجهٔ دوم

این معادلات را حل کنید

۱۱۳- $(۳x + \frac{۱}{۴})(۳x - \frac{۱}{۴}) = ۸۰{,}۹۳۷۵$

۱۱۴- $(۶ + ۲x)(۶ - ۲x) = ۰$

۱۱۵- $(x - \frac{س}{ج})(x + \frac{س}{ج}) = ب$

۱۱۶- $۲x^۲ - x = ۰$

۱۱۷- $\frac{۸x^۲}{۳} = ۷x$

۱۱۸- $\frac{س x^۲}{ب} = ج x$

۱۱۹- $\frac{x^۲ + ۳{,}۷۵}{x} - x = ۲x$

۱۲۰- $\frac{۲x^۲ - x}{۳x - ۶} + \frac{۵x - ۱}{۲} + ۷ = \frac{۸x - ۶}{۹} + ۱۳$

۱۲۱- $\frac{س x^۲ - ب x^۲}{ج^۲ - ب^۲} + x = ج - د$

مسائل در معادلات درجهٔ دوم

۱۵۲- مسئلهٔ ۱- مستطیلی داریم بوسعت ۶۷۵ ذرع مربع وطول قاعدهٔ اش سه برابر ارتفاع اوست مطلوب است طول وعرض این شکل

چون ارتفاع را x فرض کنیم قاعدهٔ اش میشود $۳x$ ومساحتش $x \times ۳x$ پس

$$٣ . x \times x = ٦٧٥$$

$$٣ x^{٢} = ٦٧٥$$

$$x^{٢} = \frac{٦٧٥}{٣} = ٢٢٥$$

$$x = \pm \sqrt{٢٢٥}$$

$$x' = ١٥$$

$$x'' = -١٥$$

وچون ارتفاع شد ١٥ ذرع قاعده میشود ٤٥ ذرع وجواب منفی اینجا صدق نکند

١٥٣ - مسئلهٔ ٢ - عددی مطلوبست که مضاعف آنرا چون بر مجذورش بیفزائیم حاصل صفر شود

آنعدد را سه فرض میکنیم پس از روی بیان مسئله این معادله حاصل شود

$$x^{٢} + ٢x = ٠$$

چون سه را بعامل مشترک لذ ربم (١٣٨) چنین شود

$$x (x + ٢) = ٠$$

پس از اینجا $x = ٠$

یا از دومی چنین شود $x = -٢$

و هر دو بمقدار ٥ و ٢- بشروط مسئله صدق کند چرا که بازاء اولی

$= ٠$

$$۰\times۰+۲\times۰=۰$$

$$۰+۰=۰$$

و بار دومی $$-۲\times-۲+۲\times-۲=۰$$

$$۴-۴=۰$$

$$۰=۰$$

۱۵۴- مسئله ۳ مجموع دو عدد ۱۳ است و حاصل ضربشان ۴۲ کدام اند این دو عدد

یکی را x فرض میکنیم دیگری میشود $x-۱۳$ آنگاه حاصل ضرب آنها باید بشود ۴۲ پس

$$x(۱۳-x)=۴۲$$

$$۱۳x-x^۲=۴۲$$

$$x^۲-۱۳x=-۴۲$$

$$x=\frac{۱۳}{۲}\pm\sqrt{-۴۲+\frac{۱۶۹}{۴}}$$

$$x=\frac{۱۳}{۲}\pm\sqrt{\frac{۱۶۹}{۴}-\frac{۱۶۸}{۴}}$$

$$x=\frac{۱۳}{۲}\pm\sqrt{\frac{۱}{۴}}$$

$$x=\frac{۱۳}{۲}\pm\frac{۱}{۲}$$

$$x'=\frac{۱۳}{۲}+\frac{۱}{۲}=\frac{۱۴}{۲}=۷$$

$$x''=\frac{۱۳}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶$$

هر دو عدد ۶ و ۷ خوب صدق کنند در جواب مسئله

۱۵۵- مسئله ۴- مستطیلی داریم که تفاضل دو ضلعش ۶ ذرع است و مساحتش ۳۹۱ ذرع مطلوب است ابعادش

ارتفاع آنرا x فرض کنیم قاعده اش میشود $x+6$ و آنوقت

$$x(x+6)=391$$

$$x^2+6x=391$$

$$x=-3\pm\sqrt{391+9}$$

$$x=-3\pm\sqrt{400}$$

$$x=-3\pm20$$

$$x=17$$

چون ارتفاع شد ۱۷ قاعده میشود ۶+۱۷ یا ۲۳

۱۵۶- مسئله ۵- چند نفر عمله گرفته شد برای حفر ۱۲۰ ذرع گودی اتفاق دو نفر آنها ناخوش شده نتوانستند همراهی کنند و آن کار بعهده مابقی شد ملاحظه نمودند که باین سبب هر کدام ده ذرع بیشتر میبایست حفر کنند پس کل عدد عملجات چند نفر بوده

اگر عدد کل عملجات x نفر باشد آنهاکه کار کرده اند میشود $x-2$ و چون در حالت اول x نفر میبایست ۱۲۰ ذرع کار تمام کنند سهم هر نفر x مرتبه کمتر باشد از ۱۲۰ یعنی $\frac{120}{x}$ و در حالت دوم عدد ذرعهای کار

هر نفر بوده است ۱۰ ذرع زیاده بر آنچه در حالت اول سهم داشت پس

$$\frac{120}{x-2} - \frac{120}{x} = 10$$ و چون جمیع جملها را بر

بر ۱۰ قسمت کنیم چنین شود $\frac{12}{x-2} - \frac{12}{x} = 1$

و چون جمیع جملهها را ضرب کنیم در حاصل ۲− x در x چنین شود

$$12x - 12x + 24 = x^2 - 2x$$

$$24 = x^2 - 2x$$

$$x^2 - 2x = 24$$

$$x = 1 \pm \sqrt{24+1}$$

$$x = 1 \pm 5$$

$$x' = 6$$

پس بهمه جهة ۶ نفر عمله بوده اند و تنها ۴ نفر مشغول کار بوده اند

مسائل حل کردنی

۱۲۲− مطلوبست دو عدد چنانچه هر گاه مجموع دو مربع آنها را بیفزائیم بر مضاعف حاصل ضرب آنها بشود ۸۱ و چون از مجموع این حاصل را موضوع کنیم باقی بماند ۱

۱۲۳− تاجری دو قسم ماهوت را بدو قیمت مختلف فروخت و از بابت فروش جنس اولی مبلغ ۱۳۵ قران گرفت و مبلغ ۷۲ قران بابت جنس دوم که ۳ ذرع کمتر بود حساب کردیم اگر بقدر ۸۰ را ذرع کمتر از همان جنس اول میفروخت و ۳ ذرع بیشتر از جنس دوم باز همان مبلغ عاید

او پیشه حال مطلوب ست ذرع وقیمت مرکب از دو جنس

۱۲۴- مجموع دو عدد ۱۳۳ است وتفاضل جذر آنها ۱ مطلوب ست آن دو عدد

فصل ۱۲

در نسبت و تناسبات

اوّل در نسبت

۱۵۷- کلیّة حاصل مقایسهٔ دو مقدار را نسبت گویند امّا در مقایسهٔ دو مقدار سه و گ منظور یا تعیین فضل سه باشد بر گ ویا اینکه سه چند مرتبه شامل گ را در حالت اوّل نسبت را تفریقی یا فضلی یا حسابی گویند و در حالت دوم نسبت را تقسیمی یا هندسی خوانند

مثلا نسبت حسابی سه بمقدار گ عبارت است از تفاضل مابین سه و گ باین صورت گ - سه و در نسبت هندسی این دو مقدار منظور خارج قسمت سه است بر گ باینصورت سه/گ (بخوانید سه بر گ)

۱۵۸- دو مقدار اجزای نسبت را دو جملهٔ آن گویند

۱۵۹- دو نسبت هندسی را معاکس گوئیم هرگاه دو جملهٔ آنها یکی باشد امّا بر خلاف ترتیب همدیگر باشند مثل گ/ک و ک/گ که دو نسبت معاکس اند

در

در تناسبات مطلقا

۱۶۰ـ هر چهار مقدار را متناسب گوئیم هرگاه نسبت مابین دو مقدار اول برابر باشد با نسبت دو تای دوم پس تناسب عبارت شد از دو نسبت متساوی

۱۶۱ـ هرگاه دو نسبت منظور حسابی باشند تناسب را حسابی گویند و اگر هندسی باشند تناسب هندسی است

تناسب حسابی را بیشتر یک فضلی گویند و مخصوصاً اسم تناسب اطلاق شود به هندسی

۱۶۲ـ موافق تعریف تناسب نمرهٔ ۱۶۰ ظاهر است که این عبارت

$$a - b = c - d$$

یک فضلی است و این عبارت

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ (یا چنین $a : b :: c : d$)

تناسب واقعی است

یک فضلی را بیشتر چنین نویسند $a . b : c . d$

و چنین تلفظ کنند a به b مثل c است به d

و تناسب نیز چنان شود یا مختصراً چنین a بر b مساوی c بر d

۱۶۳ـ در یک فضلی و در تناسب دو جملهٔ a و d را طرفین گویند

گویند ج و ع را وسطین

۱۶۴ - یک فضلی متصل گوئیم اگر وسطین برابر باشند و هر یک را
واسطهٔ حسابی گوئیم میان طرفین ·

مثلا ۹ · ۷ : ۷ · ۵

یک فضلی متصل است و ۷ واسطهٔ حسابی میان ۹ و ۵

ک · ج : ج · س

نیز یک فضلی متصل است و ج واسطهٔ حسابی است میان س و ک

تناسب را متصل گوئیم هرگاه وسطین برابر باشند
و هر کدام را واسطهٔ هندسی گوئیم میان طرفین

$$\frac{۹}{ع} = \frac{ع}{۴}$$

و

$$\frac{س}{ج} = \frac{ج}{ک}$$

تناسب متصل اند و ع و ج وسطین هندسی باشند میان طرفین

در خواص تناسبات حسابی که یک فضلی خوانند هم

۱۶۵ - خاصیت اصلی - در هر یک فضلی مجموع طرفین مساوی است
با مجموع وسطین

چراکه هر یک فضلی را مثلا ل · ح : ک · س
توان چنین نوشت ر ۱۶۲ ل - ح = ک - س

وچون

و چون جملهٔ b را منتقل دهیم بعضو دوم و x را بعضو اوّل چنین شود

$$b + c = a + x$$ فهو المطلوب

۱۶۶ — بنابراین خاصیت هرگاه یک جمله یک نسبتی مجهول باشد میتوان ازروی سه جملهٔ معلومه آنرا استخراج نمود

مثلاً اگر $a . b = c . x$

چنین قرار دهیم $a + x = b + c$

وازانجا $x = b + c - a$

۱۶۷ — در آن حالت که یک نسبتی متصل باشد باین شکل

$$a . x : x . b$$

چنین میشود $2x = a + b$

$$x = \frac{a+b}{2}$$

وازاینجا معلوم میشود که واسطهٔ حسابی میان دو مقدار مساوی است بانصف مجموع اینها

در تناسبات هندسی

۱۶۸ — خاصیت اصلی — در هر تناسب حاصل ضرب طرفین مساوی است با حاصل ضرب وسطین

مثلاً در این تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

و چون مخارج را رفع کنیم چنین شود $a\,d = b\,c$

و تناسب عددی $\frac{12}{3} = \frac{8}{2}$

چنین شود ۳ × ۸ = ۲ × ۱۲ فهو المطلوب

۱۶۹- بالعکس — هرگاه دو حاصل ضرب برابر باشند توان یک تناسب از انها ساخت

مثلا اگر حاصل ضرب e در h برابر باشد با حاصل m در n چنین نویسیم $e\,h = m\,n$

و بعد دو عضو را قسمت کنیم بر h و پس بر n تا بترتیب چنین شود

$$e = \frac{m\,n}{h}$$

$$\frac{e}{n} = \frac{m}{h}$$

و همچنین از این دو حاصل ضرب متساوی ۴ × ۹ و ۳ × ۱۲ این تناسب نتیجه شود $\frac{4}{3} = \frac{12}{9}$

۱۷۰- پس بطور کلی از چهار مقدار a و b و c و d میتوان تنسبی تألیف نمود بنا بر انکه یکی از این دو رابطه را داشته باشند

اول $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

دوم $a\,b = c\,d$

در حالت اول گوئیم که دو مقدار a و b نسبت مستقیم دارند

با دو مقدار c و b در حالت دوم بنسبت معکوس یا متعاکس

۱۷۱ — از روی حکم اصلی که ثابت نمودیم راهی بدست آید در یافتن جملهٔ چهارم تناسبی که سه جمله‌اش معلوم باشند

اگر مثلا داشته باشیم $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$

چنین مینویسیم $a\,x = b\,c$

و بعد $x = \frac{b\,c}{a}$

و همچنین جملهٔ سیم این تناسب عددی را

$$\frac{5}{2} = \frac{x}{3}$$

چنین مینویسیم $5 \times 3 = 2x$

$$x = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

در هر دو مثال مذکور جملهٔ چهارمین نسبت است برای سه مقدار معلوم

۱۷۲ — هرگاه تناسب متصل باشد

چنین $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$

چنین شود $x^2 = a\,b$

و از آنجا $x = \sqrt{a\,b}$

و از این قرار واسطهٔ هندسی میان دو مقدار مساوی است

با جذر حاصل ضرب آنها

دو لا چند خاصیت دیگر تناسبات را که دانستنش فایده است بیان آوریم

۱۷۳- در هر تناسب نسبت مجموع یا تفاضل دو جملهٔ اول با جملهٔ دوم مثل مجموع یا تفاضل دو جملهٔ اخیر است با جملهٔ چهارم

چرا که مثلا در این تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

چون بر دو عضو این تساوی واحدی بیفزائیم یا بکاهیم چنین شود

$$\frac{a}{b}\pm 1=\frac{c}{d}\pm 1$$

و چون ا را تحویل بکسر کنیم یعنی تجنیس چنین شود

$$\frac{a}{b}\pm\frac{b}{b}=\frac{c}{d}\pm\frac{d}{d}$$

یا $\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d}$ فهو المطلوب

۱۷۴- چون تناسب چیزی نیست جز عبارت از دو کسر متساوی ظاهر است که میتوان هر چهار جملهٔ تناسبی را ضرب نمود یا قسمت بر عددی بی آنکه اختلالی در تناسب دست دهد و همین عمل را میتوان نیز در صور کسور تنها جاری نمود یا در مخارج تنها

مثلا از این تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

میتوان تناسبات ذیل را ترتیب داد

$$\frac{an}{b}=\frac{cn}{d}\ ,\quad \frac{\frac{a}{n}}{\frac{b}{n}}=\frac{\frac{c}{n}}{\frac{d}{n}}\ ,\quad \frac{an}{bn}=\frac{cn}{dn}\ ;\quad \frac{a}{bn}=\frac{c}{dn}$$

و غیره

۱۷۵ – میتوان دو تناسب را جمله بجمله در همدیگر ضرب نمود بی آنکه اختلالی در تناسب دست دهد

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$$
$$\frac{e}{f}=\frac{h}{g}$$

از ضرب آنها این تناسب دست دهد

$$\frac{ae}{bf}=\frac{ch}{dg}$$

و این حکم واضح است چراکه دو تساوی را چون در هم ضرب کنیم تساوی بهم دست میدهد

۱۷۶ – چون دو تناسب را جمله بجمله برهم قسمت کنیم تناسبی دیگر نتیجه شود

در این دو تناسب $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ و $\frac{e}{f}=\frac{h}{g}$

چون مخارج را رفع کنیم چنین شود $bc=ad$ و $fh=eg$

و چون این دو تساوی را عضو بعضو برهم قسمت کنیم چنین شود

$$\frac{ad}{eg}=\frac{bc}{fh}$$

و از آنجا $\frac{a}{e}\times\frac{d}{g}=\frac{b}{f}\times\frac{c}{h}$

و خلاصه $\dfrac{\frac{a}{e}}{\frac{b}{f}}=\dfrac{\frac{c}{h}}{\frac{d}{g}}$ فهو المطلوب

تنبیه – این نکته را زود توان دریافت که دو حکم مذکور در هر چند تناسب خواهیم جاری نمود

۱۷۷ – در هر تناسب میتوان جملهای اش را بیک درجه ترقی داد بی آنکه اختلالی دست دهد

از این تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ظاهر است که این یک استنباط شود $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{c}{d}\right)^m$

اما $\left(\frac{c}{d}\right)^m = \frac{c^m}{d^m}$ و $\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

پس $\frac{a^m}{b^m} = \frac{c^m}{d^m}$ ه

۱۷۸ – در هر تناسب میتوان یک ضلع از تمام جملهها گرفت بی آنکه اختلالی دست دهد

مثلا از $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

استنباط شود $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \sqrt[m]{\frac{c}{d}}$

اما چون $\sqrt[m]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$ و $\sqrt[m]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}}$

چنین شود $\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{c}}{\sqrt[m]{d}}$

تنبیه – از روی این اصول چنین معلوم شد که مجذورات و مکعبات و غیره وجذور و کعاب و سایر اضلاع جملههای تناسب نیز متناسبند

۱۷۹ – هرگاه چند نسبت متساوی در دست داشته باشیم گوئیم نسبت مجموع صور بمجموع مخارج مثل نسبت یکی از صور است بمخرج خود

مثلا اگر چنین باشد $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h}$

و هر نسبت را برابر q فرض کنیم چنین میشود

$$q = \frac{a}{b} \text{ و } q = \frac{c}{d} \text{ و } q = \frac{e}{f} \text{ و } q = \frac{g}{h}$$

و چون مخارج را رفع کنیم چنین میشود

$$a = bq$$
$$c = dq$$
$$e = fq$$
$$g = hq$$

و چون این تساوی ها را عضو بعضو جمع کنیم چنین شود

$$a + c + e + g = bq + dq + fq + hq$$

و چون q را در عامل مشترک گذاریم چنین شود

$$a + c + e + g = (b + d + f + h)\, q$$

و چون دو عضو این تساوی را بر مضروب فیه q قسمت کنیم چنین شود

$$\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = q$$

اما بفرض $q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots\cdot$

پس $\frac{a + c + e + g}{b + d + f + h} = q = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \cdots\cdot$ فهو المطلوب

۱۸۰ — هرگاه دو نسبت متساوی در دست داشته باشیم نسبت

مجموع صورتها بمجموع مخارج مثل تفاضل مابین دو صورت است

بتفاضل مابین دو مخرج

ـند در این باب $\quad \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

چون هر نسبت را مساوی ع فرض کنیم چنین میشود

$\text{ع} = \frac{a}{b}$ و $\text{ع} = \frac{c}{d}$

و از اینجا $\quad a = b\,\text{ع} \quad (۱)$

$c = d\,\text{ع} \quad (۲)$

و چون عضو بعضو جمع کنیم چنین شود

$$a + c = b\,\text{ع} + d\,\text{ع}$$

و چون ع را در عامل مشترک گذاریم چنین شود

$$a + c = \text{ع}\,(b + d)$$

و چون دو عضو را قسمت کنیم بر $d + b$ چنین شود

$$\frac{a + c}{b + d} = \text{ع}$$

حال چون معادله (۲) را از (۱) تفریق کنیم چنین شود

$$a - c = b\,\text{ع} - d\,\text{ع}$$

و چون ع را در عامل مشترک گذاریم $\quad a - c = \text{ع}\,(b - d)$

و چون هر دو عضو را قسمت کنیم بر $b - d$ چنین شود

$$\frac{a - c}{b - d} = \text{ع}$$

اما چون این تساوی را هم حاصل یافته بودیم که [illegible] $= \frac{x + c}{b + a}$

پس $\frac{a - c}{b - a} = \frac{a + c}{b + a}$ فهو المطلوب

فصل سیزدهم

در تسلسلات یا سلسله‌ها

۱۸۱ــ تسلسل بر دو قسم است حسابی و هندسی

اما تسلسلات حسابی

۱۸۲ــ تسلسل عبارت است از جمله‌های چند که چون بر هرکدام یک عدد معین مشخصی بیفزائیم جملهٔ مابعد بدست آید و چنین مقدار ثابت را قدر نسبت سلسله گوئیم

۱۸۳ــ سلسله بر دو قسم است صعودی یا نزولی موافق آنکه جمله‌ها ردی بترقی یا روی به تنزل روند

۲ ، ۵ ، ۸ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۷ ، ۲۰ ، ۲۳ ، ... $\div$

سلسله صعودیست و قدر نسبتش ۳ چراکه (۱۸۲) هر جمله ازآن بعلاوه قدر نسبت اضافی (مثبت) ۳ برابر میشود با جمله مابعد

اما اگر چنین بنویسیم

۲۳ ، ۲۰ ، ۱۷ ، ۱۴ ، ۱۱ ، ۸ ، ۵ ، ۲ ، ۱ــ ، ۴ــ ... $\div$

سلسله نزولی بود و قدر نسبتش ۳ــ چراکه (۱۸۲) هر جمله بعلاوه قدر نسبت نقصانی

نقصان نفی ۳ - برابر میشود با جملهٔ ما بعد

۱۸۴ - سلسله‌ها را اعم از آنکه صعودی باشند یا نزولی یک دجه تلفظ میکنیم مثلاً میگوئیم نسبت ۲ به ۵ مثل ۵ است به ۸ مثل ۸ است به ۱۱ وهکذا

۱۸۵ - قضیه ۱ - در هر سلسله حسابی هر جمله مساویست با جملهٔ اول بعلاوهٔ آنقدر مرات قدر نسبت که جمله در ما قبل جملهٔ مفروضه هست و بعبارة اخری بعلاوه قدر نسبت ضرب در عدد جمله‌های ما قبل

مثلاً در این سلسلهٔ کلی

$$a \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e \cdot f \cdot g \ldots k \cdot l$$

که ضمنا صاعد فرضش میکنیم و r را قدر نسبتش آیو فت چنین شود (۱۸۲)

$$b = a + r$$

$$c = b + r$$

و چون b را بدل کنیم بمقدارش $a + r$ چنین شود

$$c = a + r + r = a + 2r$$

اما

$$d = c + r$$

چون بجای c مقدارش $a + 2r$ را قرار دهیم چنین شود

$$c = a + r + r = a + 2r$$

$$d = c + r$$

چون بجای c قرار دهیم $a + 2r$ را چنین شود

$$d = a + 2r + r = a + 3r$$

چنانچه می‌بینید جملهٔ چهارم d مساوی‌ست با جملهٔ اول a بعلاوه ۳ مرتبه قدر نسبت r و حکم همین است برای هر جملهٔ دیگر مثلا l که جملهٔ اخیر است در سلسله که n عدد جمله‌های اوست چون عدد جمله‌های ما قبل او میشود $n-1$ مقدارش مساوی میشود با جملهٔ اول بعلاوه $(n-1)$ برابر قدر نسبت و از روی این دستور حاصل شود

$$(1) \qquad l = a + (n-1)r$$

و هرگاه سلسلهٔ مفروض نزولی باشد قدر نسبت منفی است ۱۸۳

و آنوقت دستور چنین شود $l = a + (n-1) \times -r$

و از روی این دستور که باین شکل در آید

$$(2) \qquad l = a - (n-1)r$$

ثابت میشود که حکم ما صحیح و کلی است در هر دو قسم سلسلهٔ صعودی و نزولی (چون در سلسلهٔ نزولی قدر نسبت را مثبت فرض کنیم دستور (۲) چنین میگوید که در اینگونه سلسله‌ها جملهٔ اخیر مساویست با جملهٔ اول منهای قدر

نسبت

نسبت ضرب در نمره جمله ما قبل مقدم)

۱۸۶ – مثال ۱ – در این سلسله صعودی ذیل جمله شصتم مطلوبست

$\div$ ۳ . ۵ . ۷ . ۹ ....

اینجا دستور (۱) را بایه احتیاج نمود چونکه سلسله مفروضه صعود نیست

در این مثال ۳ :: a ، ۵۹ = $n-1$ و $r = 2$

و چون حروف را بدل کنیم بقدر خود چنین شود

جمله ۶۰ ام = ۳ + ۵۹ × ۲ = ۱۲۱

۱۸۷ – مثال ۲ – مطلوبست جمله ۱۵ ام این سلسله نزولی

$\div$ ۱۲۴ . ۱۱۹ . ۱۱۴ ...

اینجا دستور (۲) بکار آید و چون

$n-1$ = ۱۴ و r = ۵– و a = ۱۲۴

چنین میشود

جمله ۱۵ امی = ۱۲۴ + ۱۴ × ۵– = ۱۲۴ – ۷۰ = ۵۴ یا ...

۱۸۸ – مسئله – میخواهیم میان دو عدد مفروض چند واسطه حسابی درج کنیم یعنی میان آنها چند جمله هائی درج کنیم چنانچه همگی با آن سلسله تمامی شوند یکی از آن دو مقدار جمله اول سلسله است و دیگر جمله اخیر مثلا مقصود درج ۷ واسطه عددیست میان ۳ و ۲۷

پس اگر قدر نسبت معلوم بود میافزودیم آنرا براولی ۳ تا دومی بدست آید و بر دومی تا سیمی حاصل شود و همچنین اما پس مجهول ما قدر نسبت هست که باید در طلب آن برآمد و این از روی دستور (۱) استخراج شود چراکه

$$l = a + (n-1)r$$

و از اینجا $l - a = (n-1)r$

و چون دو عضو را بر $n-1$ قسمت کنیم چنین شود

$$r = \frac{l-a}{n-1}$$

و چون سلسله که ما در طلب تشکیل آن هستیم همه جهة دارای نه جمله هست چراکه باید هفت جمله مابین ۳ و ۲۷ درج نمود پس

$n = 9$ و بنابراین $n-1 = 8$ و علاوه بران $a = 3$ و $l = 27$

و از این قرار $r = \frac{l-a}{n-1} = \frac{27-3}{9-1} = \frac{24}{8} = 3$

و چون قدر نسبت شد ۳ سلسله مطلوبه چنین میشود

÷ ۳ . ۶ . ۹ . ۱۲ . ۱۵ . ۱۸ . ۲۱ . ۲۴ . ۲۷

و اگر بگفتند میخواهیم هفت واسطه حسابی مابین ۲۷ و ۳ درج کنیم آنوقت سلسله نزولی میشد و قدر نسبت میشد ۳- چراکه در دستور مذکور چون حروف را بدل کنیم ابتدا بر خود چنین شود

$$r = \frac{3-27}{9-1} = \frac{-24}{8} = -3$$

و سلسله

وسلسله چنین میشد

$\div\ 3 \cdot 60 \cdot 90 \cdot 120 \cdot 150 \cdot 180 \cdot 210 \cdot 240 \cdot 270$

واین همانست که بدست آوردیم امّا بعکس ترتیب سابق

۱۸۹ – میخواهیم m واسطهٔ حسابی درج کنیم میان a و l وسلسله که a جملهٔ اوّل اوست و l جملهٔ اخیرش دارای $m+2$ جمله است چونکه باید میان دو جمله a و l درج کرد m جمله دیگر پس l را بشمارهٔ $m+1$ جملهٔ متقدم بست بر وجهی که میتوان نوشت

$$l = a + (m+1)\, r$$

وازانجا

$$r = \frac{l - a}{m+1}$$

پس هر وقت بخواهیم چند جمله واسطهٔ حسابی درج کنیم میان دو مقدار مفروض قدر نسبت را باید یافت و آن تفاضل عدد دوم است بر اوّل که قسمت شود بر عدد واسطه ها بعلاوهٔ واحدی

۱۹۰ – تنبیه – هرگاه مابین هر دو جملهٔ این سلسله $\div\ a . b . c . d . e . f . h . k . l$ درج کنیم m واسطهٔ عددی هر سلسله جزو جزوی شود از سلسلهٔ کل که در آنجا جمیع جمله های سلسلهٔ مفروضه ما مشکل شده اند

برهان چون تفاضل مابین هر دو جملهٔ متوالی سلسله یک چیز است این تساوی را مینویسیم

مینویسیم $b - a = c - b = d - c \ldots = l - k$

و قدر نسبت هر سلسله جزوی باین قسم حاصل شود که (۱۸۹)

$r = \frac{b - a}{m + 1}$ و $r = \frac{c - b}{m + 1}$ وهکذا.

اما این کسور چون بصورت و مخرجشان متساویست مساوی هستند و بنابراین قدر نسبت در جمیع سلسله های جزو یکیست پس میتوان آنها را دنبال هم نوشت و از همگی یک سلسله تشکیل نمود زیرا جمله آخر جزء هر کدام میشود جمله اول سلسله مابعد مثلاً b میشود جمله اخر اولی و جمله اولین از دومی است و هکذا c جمله اخیر دومی و جمله اول سیمی و همچنین و از این قرار ترکیب سلسله های جزو یک سلسله بزرگ تالیف شد که در آن جموع جمله های سلسله مفروضه تشکیل شده اند وهو المطلوب

۱۹۱ – قضیه ۲ – در هر سلسله متصاعد مجموع دو جمله که بیک فاصله اختیار نموده باشیم از طرفین سلسله مساویست با مجموع طرفین

مثلاً در این سلسله $\div a . b . c . d . e \ldots h . i . j . k . l$

اختیار میکنیم دو جمله c و j را که بیک فاصله از طرفین آن هستند

$$c = a + 2r \qquad (1)$$

$$j = k - r \qquad (2)$$

اما $k = l - r$

چون در مساوی (۲) بدل کنیم k را بمقدارش چنین شود

$$(۳) \qquad j = l - r - r = l - 2r$$

وچون دو معادلهٔ (۱) و (۳) را عضو بعضو جمع کنیم چنین شود

$$c + j = a + 2r + l - 2r = a + l$$

وکلیه اگر در طول سلسله دو جمله e و h را چنان اختیار کنیم که یکی شان n عدد جمله در جلو داشته باشد و دیگری n جمله در عقب خود این دو تساوی صحیح باشد

$$e = a + nr$$
$$h = l - nr$$

وچون آنها را عضو بعضو جمع کنیم چنین شود

$$e + h = a + nr + l - nr = a + l$$ فهو المطلوب

۱۹۲ – قضیه ۳ – در هر سلسله حسابی مجموع جمله ها مساویست با نصف مجموع دو جملهٔ طرفین که ضرب شود در عدد جمله ها

مثلا در این سلسله $\div a . b . c . d ..... i . j . k . l$

چون مجموع جمله ها را s فرض کنیم چنین میشود

$$s = a + b + c + d \dots + i + j + k + l$$

ویا در صورتیکه جمله های سلسله را بعکس ترتیب بنویسیم چنین شود

$$s = l + k + j + i \dots + d + c + b + a$$

وچون این دو تساوی را عضو بعضو جمع کنیم چنین شود

$$2S=(a+l)+(b+k)+(c+j)+(d+i)\cdots$$

$$+(i+d)+(j+c)+(k+b)+(l+a)$$

و هر یک از جمعهای جزو مثل $(l+a)$ و $(k+b)$ و $(j+c)$ و $(i+d)$

وغیره مساوی است با مجموع طرفین چونکه مرکب است از دو جملهٔ متساوی البعد

از طرفین پس اگر بدل کنیم $(k+b)$ و $(j+c)$ وغیره را به $(l+a)$

چنین میشود $2S=(a+l)+(a+l)+(a+l)+$

$$+(a+l)\cdots+(a+l)+(a+l)+(a+l)+(a+l)$$

امّا این جمع $(l+a)$ تکرار میشود بعدد جمله های سلسله است پس اگر عدد

جمله ها را n فرض کنیم چنین شود

$$2S=(a+l)n$$

$$S=\frac{(a+l)}{2}n$$ هو المطلوب

وحال این دستور را در چند مثال جاری میکنیم

۱۹۳ – مثال ۱ – مطلوب است جمع هزار عدد اول سلسلهٔ طبیعی اعداد

÷ ۱ . ۲ . ۳ . .... ۱۰۰۰

اینجا $a=1$ و $l=1000$ و $n=1000$

وبنابراین $S=\frac{(1+1000)1000}{2}=\frac{1001\times1000}{2}=\frac{1001000}{2}=500500$

۱۹۴ – مثال ۲ – مطلوب جمع n عدد اول اعداد فرد ذیل است

÷ ۱ . ۳ . ۵ . ۷ l

این سلسله قدر نسبتش ۲ است و چنین شود

$$l = 1 + (n-1)2$$

$$l = 1 + 2n - 2$$

$$l = 2n - 1$$

و چون l را بدل کنیم بمقدارش $2n-1$ چنین شود

÷ ۱ . ۳ . ۵ . ۷ .... $2n-1$

و در حالت مفروض $a = 1$ و $l = 2n-1$ و عدد جمله‌ها n است

پس $S = \frac{(1+2n-1)n}{2} = \frac{2n^2}{2} = n^2$

از اینجا چنین نتیجه شد که مجموع n عدد اول فرد مساویست با مجذور عدد آن جمله‌ها

مثلاً مجموع ۷ عدد فرد اول این سلسله

۱ . ۳ . ۵ . ۷ . ۹ . ۱۱ . ۱۳ مساویست با ۷×۷ مساوی ۴۹

در سلسله‌های هندسی

۱۹۵ — سلسلهٔ هندسی سلسله‌ایست از جمله‌ها چند که خارج قسمت هر کدام بر جملهٔ مقدم خویش عددی شود ثابت مشخص

۱۹۶ — این عدد ثابت را قدر نسبت سلسله گوییم

۱۹۷- سلسلهٔ هندسی را موافق آنکه روی بتزاید رود یا روی بتناقص صاعد گوئیم یا هابط

مثلاً ÷ ۲ : ۶ : ۱۸ : ۵۴ : ۱۶۲ : ۴۸۶

سلسله‌ایست صاعد و قدر نسبتش ۳ چراکه بعد از تقسیم هر جمله بر مقدم خویش خارج قسمت میشود همین عدد

واما این سلسله ÷ ۴۸۶ : ۱۶۲ : ۵۴ : ۱۸ : ۶ : ۲

هابط است و قدر نسبتش $\frac{1}{3}$ است چراکه بعد از تقسیم هر جمله بر مقدم خویش خارج قسمت میشود همین عدد $\frac{1}{3}$

دستور خواندن سلسله‌های هندسی بعینه همان مثل سلسله‌های حسابی است

۱۹۸- قضیهٔ ۱- در هر سلسلهٔ هندسی هر جمله مساوی است با حاصل ضرب جملهٔ اول در قدر نسبتش که درجه و قوتی گیرد برابر جمله‌های ما قبل آن جمله

مثلاً $\div a : b : c : d : e \ldots j : k : l$

خواه صاعد باشد یا هابط قدر نسبت را x فرض میکنیم و آنوقت

$$b = ax$$

$$c = bx$$

و چون b را بدل کنیم بمقدارش ax چنین شود

$$c = ar \times r = ar^2$$

اما $d = cr$

وچون c را بدل کنیم بمقدارش ar^2 چنین شود

$$d = ar^2 \times r = ar^3$$

وهکذا چنین $e = dr = ar^3 \times r = ar^4$

وچون n را عدد جمله های سلسله فرض کنیم چنین شود

$$l = ar^{n-1} \qquad (1)$$

واین مطابق است با حکم مذکور وچون حروف b c d و e ... l را بدل کنیم بمقادیر خود آنوقت سلسله مفروضه چنین نوشته شود

$$\div\div a : ar : ar^2 : ar^3 : ar^4 \ldots ar^{n-3} : ar^{n-2} : ar^{n-1}$$

١٩٩- مثال اول- مطلوب است جمله ششم این سلسله صاعد

$$\div\div 3 : 6 : 12 \ldots$$

تساوی ما چنین میشود

$l = 3 \times 2^{6-1} = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$ که جمله ششم است

٢٠٠- مسئله ٢- مطلوب است جمله هفتم این سلسله هابطه

$$\div\div 6 : 3 : \frac{3}{2} : \frac{3}{4} \ldots$$

چنین بنویسیم

$$l = ۶ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۷-۱} = ۶ \times \left(\frac{۱}{۲}\right)^{۶} = ۶ \times \frac{۱}{۶۴} = \frac{۳}{۳۲}$$

باجزء هفتم

۲۰۱ - مسئله - دو مقدار در دست است میخواهیم میان آنها چند واسطهٔ هندسی درج کنیم .

غرض از درج کردن وسایط هندسی مابین دو مقدار مفروض اینست که جمله های چند بدست آوریم مابین آنها که تماماً یک سلسله شوند و یکی از این دو مقدار جملهٔ اول سلسله میشود و دیگری جملهٔ اخیر آن مثلاً میخواهیم سه واسطه درج کنیم مابین ۳ و ۷۶۸ پس اگر قدر نسبت در دست بود و آنرا ضرب میکردیم در جملهٔ اول ۳ جملهٔ دوّم بدست میآمد و چون باز در همان ضرب میکردیم جملهٔ سیم حاصل میشد و هکذا مابعد پس معلوم شد که مجهول ما خود قدر نسبت است و باید در طلب آن برآئیم و این بسهولت از روی دستور (۱) معلوم میشود چراکه

$$l = a q^{n-1}$$

و از اینجا

$$q^{n-1} = \frac{l}{a}$$

و چون از دو عضو ضلع $n-1$ بگیریم چنین شود

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{l}{a}}$$

و سلسله که ما در طلب تشکیل آن هستیم دارای ۵ جمله است چونکه

باید

باید ۳ جمله مابین ۳ و ۷۶۸ درج نمود پس ۵ = m و بنابراین

۴ = $m-1$ و از طرف دیگر ۳ = $ω$ و ۷۶۸ = l و از این قرار

$$q = \sqrt[m-1]{\frac{l}{ω}} = \sqrt[4]{\frac{768}{3}} = \sqrt{\sqrt{\frac{768}{3}}} = \sqrt{\sqrt{256}} = \sqrt{16} = 4$$

(ریشهٔ چهارم $ω^{\frac{1}{4}}$ یا $\sqrt[4]{ω}$ مساویست به $ω$ وآن مساویست با $\sqrt{\sqrt{ω}}$ چراکه $ω^{\frac{1}{2}} = \sqrt{ω}$ و $ω = \sqrt{ω^2}$ و از این قرار ضلع چهارم هر مقداری حاصل شود بانیکه جذر آنرا مکرّر بگیریم)

وچون قدر نسبت شد ۴ سلسلهٔ مطلوبه چنین شود

$$\div\div\ 3 : 12 : 48 : 192 : 768$$

واگر منظور این بود که سه واسطهٔ هندسی درج کنیم میان ۷۶۸ و ۳ سلسلهٔ نازله میشد و قدر نسبت میشد $\frac{1}{4}$ چراکه اگر در دستور مذکور حروف را بدل کنیم بمقادیر خود چنین شود

$$q = \sqrt[m-1]{\frac{l}{ω}} = \sqrt[4]{\frac{3}{768}} = \sqrt{\sqrt{\frac{1}{256}}} = \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4}$$

وسلسلهٔ مطلوبه چنین بود

$$\div\div\ 768 : 192 : 48 : 12 : 3$$

واین همان است که یافته بودیم امّا بعکس ترتیب مذکور

۲۰۲ — حالا میخواهیم نیز mm واسطهٔ هندسی درج کنیم مابین $ω$ و l پس چنین سلسله که در اینجا $ω$ جملهٔ اوّل شود و l جملهٔ آخر صاحب

۲ + m جمله میشود چونکه باید m جمله مابین دو جمله a و b درج شود پس b را ۱ + m جملهٔ مقدم است و بنابراین باید چنین نوشت

$$b = a r^{m+1}$$

وازانجا

$$r^{m+1} = \frac{b}{a}$$

و

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$$

ازاین قرار هر وقت بخواهیم میان دو مقدار چند واسطهٔ هندسی درج کنیم باید قدر نسبت را طلب نمود باینکه مقدار دوم را بر اول قسمت کنیم و ضلع خارج را بگیریم بشمارهٔ واحدی بیشتر از عدد جمله های درج کردنی

* ۲۰۳ — تنبیه — هرگاه میان هر دو جملهٔ سلسلهٔ ذیل m واسطهٔ هندسی درج کنیم

$$\div\div a : b : c : d : e : f \ldots : k : l$$

هر سلسلهٔ جزء جزوی شود از سلسلهٔ کل که در او جمیع جمله های سلسلهٔ مفروض تشکیل شده اند

برهان چون خارج قسمت هر دو جملهٔ متوالی در همه جا یکیست چنین مینویسیم

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} = \frac{d}{c} \cdots = \frac{l}{k}$$

پس قدر نسبت هر سلسله جزء چنین میشود (۲۰۲)

$$r = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} \quad \text{و} \quad r = \sqrt[m+1]{\frac{c}{b}} \quad \text{و هکذا}$$

اما چون مقادیر $\sqrt[m+1]{\frac{b}{a}}$ و $\sqrt[m+1]{\frac{c}{b}}$ وغیره متساوی هستند قدر نسبت در همه سلسله های جزو یکیست پس میتوان از همگی یک سلسله ترتیب داد باینکه آنهارا دنبال همدیگر بنویسیم

و آنوقت جملهٔ اخیر هر یک از انها بعینه جملهٔ اول سلسلهٔ تالی است مثلا b جملهٔ اخیر سلسلهٔ اول است و جملهٔ اول سلسلهٔ دوم و همچنین c جملهٔ اخیر سلسلهٔ دوم است و جملهٔ اول سلسلهٔ سیم وهکذا پس سلسله های جزو بعد از ترکیب یک سلسله کلی شوند که درمیان آنها جمله های سلسلهٔ مفروضه مندرج شده اند فهو المطلوب

۲۰۴ – قضیهٔ ۲ – در هر سلسلهٔ هندسی حاصل ضرب هر دو جمله که بیک فاصله باشند از طرفین مساویست با حاصل ضرب طرفین

مثلا در این سلسله

$$\div a : b : c : d : e : f \ \ldots : h : i : j : k : l$$

و از سابق میدانیم (۱۹۸) که $b = aq$

$$c = aq^2$$

و هکذا پس برای جمله که n جمله جلو دارد چنین بنویسیم

$$l = aq^n \qquad (1)$$

و موافق

و موافق همان نمره $kr = l$

$hr^2 = l$

و بازاء جملهٔ h که n جمله بعد از خودش داشته باشد چنین

$hr^n = l$

و از انجا $h = \frac{l}{r^n}$ (۲)

و چون دو معادلهٔ (۱) و (۲) را عضو بعضو در هم ضرب کنیم

$ah = ar^n \times \frac{l}{r^n} = al$ فهو المطلوب

۲۰۵ — قضیهٔ ۳ — مجموع جمله‌های هر سلسلهٔ هندسی مساویست با کسری که صورتش مثال حاصل ضرب جمله اخر باشد در قدر نسبت بر جملهٔ اول و مخرجش قدر نسبت باشد منهای ۱

این سلسلهٔ کلی را حسبان میکنیم

$\div\div a : b : c : d \ldots k : l$

و چون S را مجموع جمله‌های این سلسله فرض کنیم چنین میشود

$S = a + b + c + d \ldots + k + l$

و چون دو عضو این تساوی را در قدر نسبت r ضرب کنیم چنین شود

$Sr = b + c + d \ldots + k + l + lr$

زیرا که (۱۹۶) میتوان ar را بدل نمود به b و br را به c الخ

و حال

و حال چون تساوی اول را عضو بعضو از دوم تفریق کنیم چنین شود

$$Sn - S = b + c + d \dots + k + l + ln - a - b - c - d \dots - k - l$$

و چون جمله های متشابه را حذف کنیم چنین شود

$$Sn - S = ln - a$$

و چون S را بعامل مشترک گذاریم چنین شود

$$S(n-1) = ln - a$$

و بنابراین (۱) $S = \frac{ln - a}{n-1}$ فهو المطلوب

۲۰۶ - چون در دستور مذکور l را بدل کنیم بمقدارش ش ۱۹۸ این دستور دیگر حاصل شود

(۲) $$S = \frac{an^{n-1} \times n - a}{n-1} = \frac{an^{n} - a}{n-1} = \frac{a(n^{n}-1)}{n-1}$$

حال این دستورات را در سلسله های عددی جاری کنیم

۲۰۷ - مثال - مجموع جمله های این سلسله مطلوب است

∵ ۲ : ۶ : ۱۸ .... ۴۸۶

که در او $a = ۲$ و $n = ۳$ و $l = ۴۸۶$

و چون در دستور (۱) حروف را بدل کنیم بمقادیر خود چنین شود

$$S = \frac{۴۸۶ \times ۳ - ۲}{۳ - ۱} = \frac{۱۴۵۶}{۲} = ۷۲۸$$

۲۰۸ - مثال ۲ - مطلوبست مجموع جمله های این سلسله

$$\div\div\ 3 : 6 : 12 \ldots\ldots$$

که ده جملهٔ نخستش میکنیم و قدر نسبتش ۲ است و چون دستور (۲) را اینجا استعمال کنیم چنین شود

$$S = \frac{3(2^{10}-1)}{2-1} = 3(1024-1) = 3 \times 1023 = 3069$$

۲۰۹ — تنبیها — هرگاه سلسله تنزلی باشد قدر نسبت کوچکتر از واحد میشود و بنابراین صورت و مخرج این کسر $\frac{a r^n - a}{r-1}$ هردو منفی میشوند و اگر بخواهیم هردو مثبت شوند باید علامات کسر را تغییر داد و از این قرار دستور ذیل $S = \frac{a r^n - a}{r - 1}$ که متعلق بود بسلسله های صعودی نظر بآنکه بتنزلی هم تعلق گیرد باین شکل در آید

$$S = \frac{a - a r^n}{1 - r}$$

مثال ۲ — قوای مقادیر مادون واحد خیلی زود و تند تنزل میکند و این نکته از روی مثالی عددی خوب واضح میشود مثلا قوهٔ هفتم $\frac{1}{3}$ چنین است $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{2187}$

پس در انحالت که r کوچکتر از واحد باشد مقدار $a r^n$ خیلی کوچک میشود و هرچند عدد جمله های سلسله یعنی n بزرگتر باشد آن کوچکتر میشود و اگر n سیر کند بسمت بی نهایه $a r^n$ نزدیک میشود بصفر و آنوقت قابل بی اعتنائی و مسامحه است و آنوقت این دستور

$$s = \frac{a - ar^{n}}{1 - r}$$

چنین

چنین شود $$s = \frac{a}{1 - r} \qquad (1)$$

(این دستور چنین بنماید که هر وقت سلسلهٔ نزولی مرکب شد از جمله‌های زیاد مجموع آنها مساوی میشود بجملهٔ اول که قسمت شود بر واحد منهای قدر نسبت)

و چون این دستور را در سلسلهٔ عددی ذیل جاری کنیم

$$\div\ ۲ : ۱ : \frac{۱}{۲} : \frac{۱}{۴} : \frac{۱}{۸} : \ldots$$

چنین شود $$s = \frac{۲}{۱ - \frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{\frac{۱}{۲}} = ۴$$

این دستور را $s = \frac{a}{1-r}$ میتوان بکار برد در جمیع سلسله‌های نزولی آنوقت که r قدری بزرگ باشد

* ۲۱۰ - قضیهٔ ۴ - حاصل ضرب جمله‌های هر سلسلهٔ متساوی النسبت باجذر حاصل ضرب دو جملهٔ طرفین که ترقی نموده باشد بدرجهٔ عدد جمله‌های سلسله

مثلا در این سلسله $\div\ a : b : c : d \ldots\ i : k : l$

و چون فرض کنیم P حاصل ضرب جمیع جمله‌های این سلسله باشد چنین شود

$$P = a\,b\,c\,d \ldots i\,k\,l$$

و چون ترتیب آنها را معکوس کنیم $$P = l\,k\,i \ldots d\,c\,b\,a$$

و چون این دو تساوی را عضو بعضو در هم ضرب کنیم چنین شود

$$p^2 = al \times bk \times cj \times di \cdots \times id \times jc \times kb \times la$$

اما هر کدام از حاصل ضربهای جزو k b و ل ها و غیره مرکب شود از دو جمله که بیک فاصله اختیار شده از دو جملهٔ طرفین a و l پس جمیع جمله‌ها مساوی باشند با a l (۲۰۴) و بنابراین

$$p^2 = al \times al \times al \ldots$$

یعنی مساویست با a l که درجهٔ توانش عدد جمله‌های سلسله باشد و چون این عدد را n فرض کنیم چنین شود $p^2 = (al)^n$

و از انجا $\qquad p = \sqrt{(al)^n} \qquad (1)$

* ۲۱۱ - تنبیه - دستور مذکور را میتوان بشکل دیگر درآورد که اجرایش در عملیات آسان‌تر باشد در (۱۹۸) ذکر شد که

$$l = a q^{n-1}$$

و چون این مقدار را در تعبیر p^2 قرار دهیم چنین شود

$$p^2 = (a \times a q^{n-1})^n = (a^2 q^{n-1})^n$$

و چون هر عامل را جدا بدرجهٔ n رسانیم چنین شود

$$p^2 = a^{2n} q^{(n-1)n}$$

اما در استخراج ضلع هر جا موقع باشد میتوان درجه را قسمت نمود بر علامت ضلع (چراکه $\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2$) پس چنین شود

$$P = a^{\frac{2n}{2}} r^{\frac{(n-1)n}{2}}$$

یا $$P = a^{n} r^{\frac{(n-1)n}{2}} \qquad (2)$$

و چون ۱ - n و n دو عدد متوالی هستند یکی شان قابل قسمت باشد بر ۲ و حاصل ضرب آنها n (۱ - n) نیز چنین باشد

* ۲۱۲ — من باب مثال میخواهیم حاصل ضرب جمله های این سلسله عدد را بدست آوریم ÷÷ ۲ : ۴ : ۸ : ۱۶ : ۳۲

چون در دستور (۱) حروف را با عداد بدل کنیم چنین شود

$$P = \sqrt{(2 \times 32)^{5}}$$

$$P = \sqrt{64^{5}} = \sqrt{1073741824} = 32768$$

و از روی دستور (۲) چنین شود

$$P = 2^{5} \times 2^{\frac{(5-1)5}{2}} = 2^{5} \times 2^{\frac{4\times 5}{2}} = 2^{5} \times 2^{10} = 32 \times 1024 = 32768$$

۲۱۳ — و چون تکرار و حفظ دستورات اصلیه سلسله ها خیلی مفید است ما همگی را اینجا باز میآوریم

در سلسله های حسابی

$$l = a + (n-1) r \qquad (1)$$

$$s = \frac{(a+l)n}{2} \qquad (2)$$

در سلسله های هندسی

(٣) $$l = a r^{n-1}$$

(٤) $$s = \frac{a(r^{n}-1)}{r-1}$$ یا $$s = \frac{lr - a}{r-1}$$

(٥) $$s = \frac{a - a r^{n}}{1-r}$$

(٦) $$s = \frac{a}{1-r}$$

(٧) $$p = a^{n} r^{\frac{(n-1)n}{2}}$$ یا $$p = \sqrt{(al)^{n}}$$

امثله و مسائل چند در تناسبات و سلسله ها

مقدار x در این دو تناسب حسابی مطلوب است

١٢٥ $x \cdot 9 : 15 \cdot 11$

١٢٦ $14 \cdot x : 7 : 25$

١٢٧ – مطلوب است واسطهٔ حسابی میان ١٩ و ٢٧

١٢٨ – چیست مقدار واسطهٔ حسابی میان a و b

مقدار x را در این تناسبات معلوم کنید

١٢٩ $x : 9 = 4 : 5$

١٣٠ $15 : x = 7 : 8$

١٣١ $\frac{9}{11} = \frac{17}{x}$

١٣٢ – واسطهٔ هندسی میان این دو عدد ٩ و ٤ چیست

١٣٣ – واسطهٔ هندسی میان a و b چه قدر است

۱۳۴- این معادله را $l = a + (n-1)r$ نسبت به a حل کنید

۱۳۵- همان معادله را نسبت r حل کنید

۱۳۶- از روی همان دستور مقدار n را معلوم کنید

۱۳۷- سلسلهٔ حسابی داریم جملهٔ اولش ۱ و قدر نسبت ۲ و جملهٔ اخیرش ۲۷ مطلوب است عدد جمله‌ها

۱۳۸- سلسلهٔ حسابی داریم جملهٔ اولش $\frac{1}{2}$ و قدر نسبت ۲ و عدد جمله‌هایش ۲۵ مطلوب است جملهٔ اخیر

۱۳۹- این دستور را $S = \frac{(a+l)n}{2}$ نسبت به l حل کنید

۱۴۰- همان دستور را نسبت به n حل کنید

۱۴۱- سلسلهٔ حسابی داریم ده جمله و اولش ۵ است و مجموعش ۱۲۰ پس جملهٔ اخیرش چه قدر باشد

۱۴۲- منظور حل این معادله است $S = \frac{lr-a}{r-1}$ نسبت به r

۱۴۳- مقدار r را از این معادله استخراج کنید $S = \frac{a}{1-r}$

۱۴۴- شخص مآل اندیشی در هفتهٔ اولی یکصد دینار اندوخته کرد و در هفتهٔ دوم ۸۰ و در هفتهٔ سیم ۶۰ و هکذا تا پنجسال شمسی میخواهیم بدانیم که در آخر چه مبلغ اندوخته دارد

۱۴۵- مطلوب است مجموع جمله های سلسلهٔ نزولی ذیل

∺ ۱ : ۱/۳ : ۱/۹ : ۱/۲۷ ....

۱۴۶ – مطلوب است مجموع ده جملهٔ اول این سلسله

∺ ۳ : ۶ : ۱۲ .....

۱۴۷ – مطلوب است جملهٔ نهم سلسلهٔ هندسی که جملهٔ اولش ۱ است و قدر نسبتش ۳

۱۴۸ – مطلوب است جملهٔ اول و جملهٔ آخر سلسلهٔ حسابی که قدر نسبتش ۲ است و عدد جمله‌ها ۳۸ و مجموع جمله‌ها ۱۴۴۴

۱۴۹ – استادی با شاگردش قرار داد پول ناهار روز اول ۱۰ دینار و دوم ۲۰ دینار و سیم ۳۰ دینار و هکذا تا روز بیستم حال مطلوب است مجموع پول ناهار این مدت و پول ناهار یومیهٔ وسطی او

فصل چهاردهم

در لگاریتم

۲۱۴ - دو سلسله را جمله بجمله زیر هم مینویسیم یکی هندسی ابتدا از ۱ و دیگر حسابی ابتدا از صفر پس چنین دستگاه را لگاریتم گوئیم مثل این دو سلسله

∷ ۱ : ع : ع^{۲} : ع^{۳} : ع^{۴} : ع^{۵} : ع^{۶} : ع^{۷} : ع^{۸}

: ۰ : n : ۲n : ۳n : ۴n : ۵n : ۶n : ۷n : ۸n

پس جملهٔ تمام ۰ و n و ۲n ... از سلسلهٔ حسابی ابتدا شده به صفر و نظایر همان عدد که جزو سلسلهٔ هندسی منظور شده باشند ابتدا شده بواحد

۲۱۵ - از اینکه سلسلهٔ هندسی ابتدا بواحد شده و سلسلهٔ حسابی ابتدا بصفر چنین بر می آید که در سلسلهٔ هندسی هر جمله قوتی باشد از قدر نسبت و در سلسلهٔ حسابی مضربی باشد از قدر نسبت و خلاصه هر دو جمله که در یک رتبه واقع باشند درجهٔ قوت قدر نسبت و مضرب قدر نسبتشان یکی است مثلا در دستگاه مذکور ۲n و ۴n جملهٔ سیم و پنجم سلسلهٔ حسابی مقابل است با ع^{۲} و ع^{۴} جملهٔ سیم و پنجم سلسلهٔ هندسی

۲۱۶ - این نکته واضح است که دستگاه لگاریتم را اقسام و انواع بیشمار تواند بود اما در جمیع آنها شرط واجب اینست که سلسلهٔ هندسی باید از واحد

۲ [illegible]

شروع شود و سلسله حسابی از صفر و علاوه بر آن در هر دو سلسله قدر نسبت باید مثبت باشد و در هندسی بزرگتر از واحد اما در حسابی هرچه باشد مطلق است

۲۱۷ – در هر دستگاه عددی که لگاریتمش واحد باشد مبنای این دستگاه گویند

مثلا در دستگاه ذیل مبنا ۲ هست و ۹

÷÷ ۱ : ۲ : ۴ : ۸ : ۱۶ : ۳۲ : ....

÷ ۰ . ۱ . ۲ . ۳ . ۴ . ۵ ....

÷÷ ۱ : ۳ : ۹ : ۲۷ : ۸۱ : ۲۴۳ ....

÷ ۰ . ۰٫۵ . ۱ . ۱٫۵ . ۲ . ۲٫۵ ....

در خواص اقسام لگاریتم

۲۱۸ – قضیه ۱ – لگاریتم حاصل ضرب چند عامل مساوی است با مجموع لگاریتمهای آن عاملها مثلا در این سلسله کلی

÷÷ ۱ : ع : ع^{۲} : ع^{۳} : ع^{۴} : ع^{۵} : ع^{۶} : ع^{۷} : ع^{۸} .... ع^{م}

÷ ۰ . ن . ۲ن . ۳ن . ۴ن . ۵ن . ۶ن . ۷ن . ۸ن ... من

چون سه عامل ع و ع^{۲} و ع^{۴} را اختیار کنیم حاصل ضربشان میشود

ع × ع^{۲} × ع^{۴} = ع^{۷}

اما لگ ع + لگ ع^{۲} + لگ ع^{۴} = ن + ۲ن + ۴ن = ۷ن

و ظاهر است

و ظاهر است که $m n$ لگاریتم N و است

و حاصل ضرب a^n در a^m میشود a^{n+m} اما لگاریتم a^n عدد n میباشد

$n\,n$ و از a^m میباشد $n\,m$ پس

$$\log a^n + \log a^m = n\,n + m\,n = (n+m)\,n$$

و چون بنابر (۲۱۴) دو جملهٔ a^{n+m} و $n\,(m+n)$ متقابل

واقع شده اند پس دومی لگاریتم اولی است و چنین نویسیم

$$\log a^m + \log a^n = \log a^{n+m}$$ فهو المطلوب

۲۱۹ – قضیهٔ ۲ – لگاریتم خارج قسمت مساویست با لگاریتم

مقسوم منهای لگاریتم مقسوم علیه

چراکه $\frac{D}{d} = q$ یعنی $\frac{م}{م} = خ$ یعنی مقسوم قسمت بر مقسوم

علیه برابر است با خارج قسمت

ازانجا $D = d\,q$ یا $D = q\,d$

اما (۲۱۸) $\log D = \log q + \log d$

پس $\log q = \log D - \log d$ فهو المطلوب

۲۲۰ – قضیهٔ ۳ – لگاریتم قوهٔ مقداری مساویست با لگاریتم

آن مقدار ضرب در درجهٔ قوت

مثلاً اگر منظور طلب لگاریتم a^3 باشد چنین قرار میدهیم

$$a \times a \times a \dots = a^n$$

وبنابراین $\log a^3 = \log a + \log a + \log a = 3 \log a$

وبطورکلی $\log a^m = \log a + \log a + \log a \dots = m \log a$

فهوالمطلوب

۲۲۱ - قضیهٔ ۴ - لگاریتم ضلع مقداری مساویست با لگاریتم آن مقدار قسمت بر علامت ضلع

مثلا مطلوبست لگاریتم $\sqrt[5]{a}$ وچون x را ضلع پنجم a فرض کنیم چنین شود $x = \sqrt[5]{a}$

وچون هر دو عضو تساوی را بقوت پنجم برسانیم چنین شود

$$a = x^5$$

وچون (۲۲۰) $\log a = 5 \log x$

پس $\log x = \frac{\log a}{5}$

امّا چون $\log x = \log \sqrt[5]{a}$

چنین شود $\log \sqrt[5]{a} = \log x = \frac{\log a}{5}$

وچون بهمان دلیل پیش رویم ثابت میشود که کلیّة

$\log \sqrt[n]{a} = \frac{\log a}{n}$ فهوالمطلوب

۲۲۲ - تنبیه - از روی این چهار قضیه بدست میآید میزان

فواید کمیه که توان از لگاریتم برد مثلا عمل ضرب بدل میشود بجمع و عمل قسمت بتفریق و ترقی دادن درجه بضرب و استخراج ضلع بقسمت بخصوص در عمل اخیر که اغلب میکشاند ما را باعمال خیلی طویل و اینجا بلگاریتم خیلی سهل تمام میشود

در لگاریتم مشهور

۲۲۳ - اگر بنا بر این بود که هر وقت محتاج استعمال لگاریتم باشیم مدام مشغول استخراج آن شویم بعمل حساب استعمال لگاریتم غیر ممکن بود بل محال لهذا محاسبین لگاریتمهای اعداد را قبل از وقت زحمت کشیده استخراج نموده و در جداول چند ضبط نموده اند از روی این دو سلسله

÷ ۱ : ۱۰ : ۱۰۰ : ۱۰۰۰ : ۱۰۰۰۰

÷ ۰ . ۱ ۲ ۰ ۳ ۰ ۴

که میتوان از طرف چپ نیز آنها را کشانید و بشکل کلی نزد را ورد (۱۹۵ و ۱۸۲)

... : ۱۰۰۰۰ : ۱۰۰۰ : ۱۰۰ : ۱۰ : ۱ : $\frac{۱}{۱۰}$: $\frac{۱}{۱۰۰}$: $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ ....

... ۴ . ۳ . ۲ . ۱ . ۰ . -۱ . -۲ . -۳ ...

و لگاریتمهائی که از این دستگاه استخراج شوند معروفند بلگاریتم مشهور یا بلگاریتم بریگث (واضع لگاریتم در فرنگستان فاضلی بود از اهل انگلیس معروف به نپر که در سال ۱۰۲۶ هجری فوت شده

امّا بریگ اوّل شخصی است که جداول لگاریتم مشهور را در سال ۱۰۳۴ انتشار داد

۲۲۴ — چون اندک تأملی در دو سلسلهٔ فوق نمائیم نکات ذیل بدست میآید

اولاً — عدد ۱۰ که مبنای شمار عشاری است در اینجا نیز مبنای لگاریتم واقع شده

۲ — اعداد ما دون واحد یعنی کسور خاص را لگاریتم کوچکتر از صفر شود بنابراین منفی باشند

۳ — دو عدد متعاکس صاحب یک لگاریتم اند امّا بحسب علامت مخالفند همدیگر مثلاً لگاریتم ۱۰۰ عدد ۲ است و لگاریتم $\frac{1}{100}$ عدد ۲ — و مجموع این دو لگاریتم میشود صفر و باید چنین باشد چونکه حاصل ضرب ۱۰۰ در $\frac{1}{100}$ میشود ۱ پس دو عدد متعاکس که حاصل ضربشان واحد باشد مجموع دو لگاریتم شان همواره صفر شود

۴ — چون قدر نسبت هندسی ۱۰ است و قدر نسبت حسابی ۱ لگاریتمهای ۱۰۰ یا 10^2 و ۱۰۰۰ یا 10^3 و ۱۰۰۰۰ یا 10^4 و ۱۰۰۰۰۰۰۰ یا 10^m میباشند ۲ و ۳ و ۴ ... m

۵ — اعداد منفیه چون در سلسلهٔ هندسی مندرج و ظاهر نشده اند ابداً صاحب لگاریتم نمیشوند

۶ — عدد خیلی کوچک را چون لگاریتمش خیلی بزرگ میشود و با علامت

منفی

منفی پس علامت لگاریتم صفر بنهایت منفی است

۲۲۵ — اعدادی که جزو سلسلهٔ هندسی مندرج باشند لگاریتم هاشان در خود سلسلهٔ حسابی یافت میشود و امّا اعدادیکه عیناً در آن سلسلهٔ هندسی نباشند راه یافتن لگاریتم هاشان از قرار دستور ذیل است واسطه های هندسی چند بعدد معین مابین جمیع جمله های سلسلهٔ هندسی درج کرده اند و این وسایط باید آنقدر زیاد باشند تا مابین جملهای سلسلهٔ جدید اعدادی یافت شود که اختلافات خیلی قلیل داشته باشند با اعداد ۱ و ۲ و ۳ و ۴ .... و ۱۱ و ۱۲ و ۱۳ و .... ۱۰۱ و ۱۰۲ و ۱۰۳ و .... ۱۰۰۱ و ۱۰۰۲ و ۱۰۰۳ و غیره تا بتوان همین اعداد را بجای جمله های واقعی سلسله اختیار نمود

و امّا در یافتن لگاریتم هاشان مابین جمیع جمله های سلسلهٔ حسابی همچنان جمله های وسایط عددی درج نموده اند بشماره وسایط هندسی و جمله های چنین سلسلهٔ حسابی جدید لگاریتم میشوند نظایر خود را از سلسله هندسی یعنی اعداد ۲ و ۳ و ۴ و .... را چونکه حالا اشاره نمودیم که این اعداد را خیلی کم اختلاف است از آن نظایر معهوده

۲۲۶ — تنبیه ۱ — دستوریکه برای یافتن لگاریتمهای اعداد حالا ذکر نمودیم بی حد و اندازه طولانیست و دستوریکه واقعاً مهندسین پیش گرفته اند

گرفته اند در جدول باین دفعه و خیلی سهل و زود به نتیجه میرساند ما را آماده کند
آن ما فوق درجه این اصول است پس چشم از ذکرش میپوشیم و مرحوم والد حقیر را

[illegible]

تنبیه ۲ - چون لکاریتم حاصل ضرب اعداد مساوی شد بجمع لکاریتمهای عاملها پس این خاصیت باعث اختصار عمل شد بانکه همین تنها لکاریتمهای اعداد فرد اول را طلب کنیم

مثلا در یافتن لکاریتم ۱۵ دو لکاریتم ۳ و ۵ را جمع میکنیم

تنبیه ۳ - چون دو عدد متعاکس مثل ۱۰ و $\frac{۱}{۱۰}$ یا $\frac{۳}{۴}$ و $\frac{۴}{۳}$ یا کمیة مثل $\frac{ب}{ج}$ و $\frac{ج}{ب}$ را لکاریتمهاشان بحسب مقدار یکی است و بحسب علامت مخالف اند قناعت نموده اند باستخراج لکاریتمهای اعداد بزرگتر از واحد و اگر بفرض لازم شود طلب لکاریتم $\frac{۳}{۴}$ پس لکاریتم $\frac{۴}{۳}$ را بگیرند و علامتی منفی باو دهند

تنبیه ۴ - اعدادی که مؤلف این سلسله اند ..... ۱۰۰ : ۱۰ : ۱ :: لکاریتمهاشان اعداد صحاح اند و بس و اما سایر اعداد لکاریتمهاشان مرکب است از جزوی صحیح و از جزوی اعشار

۲۲۷ - جزو صحیح لکاریتم را مفصل گوئیم و موافق این تعریف اعداد واقعه مابین ۱ و ۱۰ را مفصل صفر است و اعداد مابین ۱۰ و ۱۰۰ را مفصل ۱ است و مابین ۱۰۰ و ۱۰۰۰ را مفصل ۲ و مابین ۱۰۰۰ و

۱۰۰۰۰

۱۰۰۰۰ را مفصل ۳ و کلیهٔ مفصل اعداد واقعه مابین ۱۰^۳ و ۱۰^{۳+۱} میباشد ۳ و چنانچه می بینید مفصل همواره واحدی کمتر است از رقم نمایندهٔ مرتبهٔ برترین واحد عددی که این مفصل تعلق بآن دارد و پس از روی مفصل برترین واحد عدد بدست میآید و بالعکس از روی برترین واحد عدد معروض مفصل لگاریتم آن عدد بدست میآید مثلا لگاریتمی که مفصلش ۴ باشد متعلق باشد بعددیکه برترین واحدش از مرتبهٔ پنجم است مثلا در عدد ۱۲۰۸۳۴ که برترین واحدش از مرتبهٔ ششم است مفصل لگاریتمش میشود ۵

۲۲۸ - قضیهٔ ۱ - چون عددی را ضرب کنیم در ۱۰ و ۱۰۰ و ۱۰۰۰ و غیره مفصل لگاریتمش بقدر ۱ و ۲ و ۳ واحد و غیره افزوده میشود اما جزو اعشارش تغییر نمیکند

چراکه اگر بنویسیم   م = ع لگ

چنین میشود   ۱۰ لگ + ع لگ = ع ۱۰ لگ

و چون   م = ع لگ
۱ = ۱۰ لگ

پس   ۱ + م = ع ۱۰ لگ

و همچنین   ۲ + م = ۱۰۰ لگ + ع لگ = ع ۱۰۰ لگ

و از این قرار چون عددی را مثلا ع ضرب کنیم در ۱۰ و در ۱۰۰ و غیره لگاریتم

آن عدد را

آنعدد را تغییر عارض نشود جز در مفصل که بچند واحد افزوده شود و ابداً اعشار را تغییر دست ندهد

٢٢٩ – تنبیه ٢ – و بالعکس چون عددی را قسمت کنیم بر ١٠ و ١٠٠ و ١٠٠٠ مفصل لکاریتمش باندازهٔ ١ و ٢ و ٣ و ... واحد میکاهد اما جزو اعشار تغییر نکند

مثلاً فرض کنیم

م = ع لك

آنوقت

١ – م = ١٠ لك – ع لك = ع/١٠ لك

و هکذا

٢ – م = ١٠٠ لك – ع لك = ع/١٠٠ لك

و از این قرار هرگاه عددی را بر ١٠ و ١٠٠ و ... قسمت کنیم باید احاد صحاح چند از لکاریتم آن کاست و بنابراین در جزو اعشار تغییری دست ندهد

در جداول لکاریتم

٢٣٠ – جدول لکاریتم عبارت است از جدولی که مشتمل باشد بر اعداد صحاح متوالیه ابتدا از ١ تا حد معینی و در مقابل هر کدام لکاریتمش با چند رقم اعشار بدقت حساب شده و آنجا منضبط گشته جداول لکاریتم مختلف است و هر کدام را در موقعی استعمال کنند و معمول تر آنها صاحب ٧ رقم اعشار است یا ٥ رقم من جمله آن جدولی که حقیر چند سال قبل مقدمهٔ آنرا چاپ کرد و جداول را با مرکب چاپ نوشت ولی هنوز بطبع نرسیده و انشاءالله

درصدد خواهیم برآمد و اشتباه آن با ارقام فرنگی یافت میشود شامل لگاریتم اعداد است از ۱ تا ۱۰۰۰۰ بطوریکه تا ۱۰۰۰ با ۸ رقم اعشار است و ما فوق تا آخر با ۷ رقم اعشار است و چون دستور استعمال جداول ۵ رقمی و ۷ رقم اعشاری یکی است ما در مسائل ذیل بهر دو رجوع میکنیم

در استعمال جداول

۲۳۱ — مسئله ۱ — میخواهیم لگاریتم عدد معینی را از روی جدول معلوم کنیم

هر وقت طلب لگاریتم عدد مفروضی لازم شود چند حالت مختلف ممکن است روی دهد که بترتیب اینجا بیان میکنیم

اولا — عدد مفروض صحیح باشد و کوچکتر از ۱۰۰۰۰ در این حالت آن عدد بعینه یافت شود در ستون نهائی که بعنوان عدد است همینقدر باید آنرا یافت و در پهلوی آن لگاریتمش درج شده

مثلا بازاء این عدد ۲۷۴۷ نوشته شده است لگاریتمش ۳٫۴۳۸۸۶

پس مینویسیم $\text{لگ}\ ۲۷۴۷ = ۳٫۴۳۸۸۶$

دوم — آنکه عدد صحیح باشد و بزرگتر از ۱۰۰۰۰ پس از طرف راست عدد آن قدر ارقام جدا میکنیم که جزو سمت چپ در جداول یافت شود

مثلا

مثلاً اگر مطلوب لگارتیم این عدد باشد ۱۰۸۶۷۱ دو رقم از یمین این عدد جدا میکنیم آنوقت باید لگارتیم این عدد را ۱۰۸۶٫۷۱ یافت و چون آن واقع شده است مابین ۱۰۸۶ و ۱۰۸۷ لگارتیمش واقع شده باشد مابین لگارتیمهای این دو عدد و بنابراین معادل آنست بالگارتیم ۱۰۸۶ بعلاوه کسری

و چون لگ ۱۰۸۶ = ۳٫۰۳۵۸۳

و لگ ۱۰۸۷ = ۳٫۰۳۶۲۳

و تفاضل مابین این دو لگارتیم اینست ۰٫۰۰۰۴۰ (و آن در جدولی جدا مثبت شده) و از این قرار چون واحدی بر عدد ۱۰۸۶ بیفزائیم بر لگارتیمش ۰٫۰۰۰۴۰ افزوده شود پس اگر بر آن عدد همین ۰٫۷۱ بیفزائیم بر لگارتیمش چه قدر افزوده شود این قدر (۰٫۷۱ جزو از ۰٫۰۰۰۴۰) یا ۰٫۷۱×۰٫۰۰۰۴۰ = ۰٫۰۰۰۲۸ پس لگارتیم متعلق باین عدد ۱۰۸۶٫۷۱ چنین میشود

۳٫۰۳۵۸۳ + ۰٫۰۰۰۲۸ = ۳٫۰۳۶۱۱

اما عدد ۱۰۸۶٫۷۱ چون بقدر ۱۰۰ مرتبه کوچکتر هست از عدد مفروض مفصل لگارتیمش همان مقدار میشود اما دو واحد کمتر (۲۲۹) پس

لگ ۱۰۸۶۷۱ = ۵٫۰۳۶۱۱

ازروی این مثال معلوم شد که درتعیینِ لگاریتم متعلق بجزو اعشاری عددی باید ضرب نمود ارقام اعشاری را در تفاضل جدولی که ظاهر باشد بادو عددِ طرفینِ آن عددی که لگاریتمش مطلوب است

سیّم - آنکه عددما اعشاری باشد بزرگتر یا کوچکتر از ۱۰۰۰۰ درتعیین لگاریتم عدد اعشاری باید ممیز را بطرف راست یا چپ آن قدر سیر داد که اگر ممکن باشد عددی بدست آوریم که مفصلتش ۳ باشد و آنوقت مثل حالت سابق باید رفتار نمود جز آنکه در آخر باید افزود یا کاست مفصل لگاریتم را چند واحد موافق تصرفی که در عدد مفروض واقع شده

مثلا درتعیین لگاریتم این عدد ۲۹۵۴۱٫ را باید در طلب لگاریتم این عدد ۱۲۹۵٫۴۱ برآمد در فوق (حالت دوّم) ذکر شد که

۰٫۰۰۰۳۴ × ۰٫۴۱ + ۱۲۹۵ لگ = ۱۲۹۵٫۴۱ لگ

پس ۳٫۱۱۲۴۱ = ۰٫۰۰۰۱۴ + ۳٫۱۱۲۲۷ = ۱۲۹۵٫۴۱ لگ

وچون عدد مفروض را در ۱۰۰۰ ضرب کنیم بر مفصّل سه واحد بیفزاید و بنابراین

۰٫۱۱۲۴۱ = ۱٫۲۹۵۴۱ لگ

وهمچنین

۱٫۱۱۲۴۱ = ۱۲٫۹۵۴۱ لگ

۲٫۱۱۲۴۱ = ۱۲۹٫۵۴۱ لگ

۴٫۱۱۲۴۱ = ۱۲۹۵۴٫۱ لگ

۵٫۱۱۲۴۱ = ۱۲۹۵۴۱ لگ

چهارم - آنکه عدد مفروض کسری باشد اعشاری در اینجا آن کسر را عددی صحیح فرض میکنیم و اما مفصلش منفی است و شامل عده آحادیست که بدست آید از روی مرتبهٔ اولین رقم معنی بخش کسر بعد از ممیز مثلا برای لگاریتم این عدد ۰٫۶۸۳۴۳۲ باید مانند امثلهٔ مذکوره لگاریتم این عدد را ۶۸۳۴٫۳۲ یافت

لگ ۶۸۳۴٫۳۲ = ۳٫۸۳۴۶۹

و چون کسر مفروض را ضرب کرده ایم در ۱۰۰۰۰ چهار واحد بر مفصل افزوده ایم و بنابراین مفصل ما این است ۳ - ۴ = -۱

پس لگ ۰٫۶۸۳۴۳۲ = -۱ + ۰٫۸۳۴۶۹

و بطور کلی چنین لگ ۰٫۶۸۳۴۳۲ = ۱̄٫۸۳۴۶۹

و علامت - متعلق باشد بهمان عدد که رویش رسم شده و همچنین

لگ ۰٫۰۶۸۳۴۳۲ = -۲ + ۰٫۸۳۴۶۹ = ۲̄٫۸۳۴۶۹

لگ ۰٫۰۰۶۸۳۴۳۲ = ۳̄٫۸۳۴۶۹

لگ ۰٫۰۰۰۶۸۳۴۳۲ = ۴̄٫۸۳۴۶۹

پنجم - آنکه عدد مفروض کسر متعارفی باشد هر وقت مطلوب لگاریتم کسری متعارفی باشد باید کسر را معکوس نمود پس لگاریتم شکل جدید با علامت - لگاریتم کسر مفروض باشد ۲۲۵ تقسیم ۳ مثلا لگاریتم

لگاریتم ۵/۱۱ همان لگاریتم ۱۱/۵ هست امّا با علامت -

وچون (۲۱۹)

لگ ۱۱/۵ = لگ ۱۱ − لگ ۵ = ۱٫۰۴۱۳۹ − ۰٫۶۹۸۹۷ = ۰٫۳۴۲۴۲

پس

لگ ۵/۱۱ = −۰٫۳۴۲۴۲

۲۳۲ - تنبیه ۱ - لگاریتمی که تمامش منفی باشد قلیل الاستعمال است و در هنگام عمل خیلی سهل‌تر است استعمال لگاریتمی که همین مفصلش تنها منفی باشد پس اگر لگاریتمی داشته باشیم تمامش منفی میتوان بسهولت بدل کردش بلگاریتمی که همین مفصلش تنها منفی باشد

پس مثال فوق را اینجا باز آوریم

لگ ۵/۱۱ = −۰٫۳۴۲۴۲ = ۱ − ۰٫۳۴۲۴۲ − ۱ = (۱ − ۰٫۳۴۲۴۲) − ۱

وچون تفاضل میان جامعه را بگیریم چنین شود

لگ ۵/۱۱ = (۱ − ۰٫۳۴۲۴۲) − ۱ = ۰٫۶۵۷۵۸ − ۱ = $\bar{۱}$٫۶۵۷۵۸

تنبیه ۲ - تفاضل مابین واحد جزء اعشار لگاریتم را متمم گوییم و آن باین قسم حاصل شود که ابتدا از جیب هر رقم لگاریتم را از ۹ تفریق کنند و رقم اخیر سمت یمین تنها را از ۱۰ مثلاً در متمم حسابی ۰٫۴۲۳۵۶ میگوییم ۴ از ۹ : ۵ و ۲ از ۹ : ۷ و ۳ از ۹ : ۶ و ۵ از ۹ : ۴ و ۶ از ۱۰ : ۴ و از این قرار متمم

حسابی ۰٫۴۲۳۵۶ یعنی ۰٫۴۲۳۵۶ - ۱ میشود ۰٫۵۷۶۴۴

تنبیه ۳ - آنچه در خصوص طلب لگاریتم عددی گفتیم توان در این چند سطر مختصر نمود ستبدیل کنید (هر وقت ممکن باشد با آنکه صفر در میان ضخ کند) عدد مفروض را بعددی دیگر که مفصلش ۳ باشد چون بدست آورده شد لگاریتم چنین عدد جعلی را آنوقت مفصلش را چیزی بیفزائیم یا بکاهید موافق تفرقی که در عدد مفروض نموده اید

۲۳۳ - مسئله ۲ - مطلوبست عددما بازاء لگاریتم مفروضی

در حل این مسئله که عکس مسئله سابق است چند حالت را باید ذکر نمود

اوّل - آنکه لگاریتم مفروض عیناً در جداول یافت شود

هرگاه لگاریتم مفروض در جداول یافت شود باید از در ستونی طلب نمود که بعنوان لك باشد و در پهلوی آن عدد مطلوب را یافت مثلاً معلوم میکنیم که این لگاریتم ۳٫۵۸۶۰۲ متعلق است باین عدد ۳۸۵۵

دوّم - آنکه جزو اعشار لگاریتم در جداول یافت نشود

مثلاً در یافتن عددما بازاء این لگاریتم ۳٫۱۸۹۰۵ چون بجدول رجوع کنیم معلوم میشود که این لگاریتم واقع باشد مابین لگاریتمهای دو عدد ۱۵۴۵ و ۱۵۴۶ و بنابراین عدد مطلوب ۱۵۴۵ است

بعلاوه کسری و تفاضل جدولی مابین لگاریتم عدد ۱۵۴۵ و لگاریتم عدد ۱۵۴۶ اینست ۰٫۰۰۰۲۸ و تفاضل مابین لگاریتم عدد ۱۵۴۵ و لگاریتم عدد مفروض اینست ۰٫۰۰۰۱۲ پس گوئیم که چون ۰٫۰۰۰۲۸ بر لگاریتم عدد ۱۵۴۵ بیفزائیم حاصل شود لگاریتم عدد ۱۵۴۶ یعنی افزایش ۰٫۰۰۰۲۸ بازاء واحد است پس بازاء ۰٫۰۰۰۱۲ چه کسری بر عدد افزاید

و آنوقت این تناسب را نویسیم

$$\frac{0.00012}{\text{م}} = \frac{0.00028}{1} \quad \text{یا} \quad \frac{12}{\text{م}} = \frac{28}{1}$$

$$28\,\text{م} = 12$$

$$\text{م} = \frac{12}{28} = 0.4$$

پس عدد مطلوب این است ۱۵۴۵٫۴

مثال دیگر مطلوبست عدد ما بازاء این لگاریتم ۳٫۱۰۵۷۲ چون این لگاریتم را با مفصلش در جدول طلب کنیم معلوم میشود که عدد ما بازایش ۱۲ است تا واحدی تقریب اما اگر مفصل را ۳ قرار دهیم واقع شود مابین لگاریتم عدد ۱۲۷۵ و عدد ۱۲۷۶ و برای یافتن اعشار ۱۲۷۵ باید بطریق فوق رفتار نمود

تفاضل جدولی ۳۴ است و تفاضل میان لگاریتم جعلی و لگاریتم ۱۲۷۵ میباشد ۲۱ و چون قسمت کنیم ۲۱ را بر ۳۴ خارج قسمت میشود ۰٫۶ و از این قرار این لگاریتم ۳٫۱۰۵۷۲ تعلق گیرد بعدد ۱۲۷۵٫۶ و این لگاریتم

لکاریتم ۲٫۱۰۵۷۲ تعلق گیرد بعددی که یکصد مرتبه کوچکتر باشد یعنی ۱۲٫۷۵۶

از روی این مثال چنین معلوم شد که در طلب عدد ما بازاء لکاریتم مفروض همواره باید این لکاریتم را با بزرگترین مفصلی که در جداول یافت شود طلب کرد و آنوقت محاسبه دقیق تر شود و عمل مختصر تر

سیم ـ آنکه لکاریتم مفروض را مفصّل زیادتر از ۳ باشد آنوقت باید لکاریتم مفروض را راجع نمود بحالتی که مفصلش زیاده بر ۳ نباشد و بعد مثل سابق رفتار نمود جز آنکه در آخر عدد نتیجه را باید ضرب کرد در ۱۰ و ۱۰۰ وغیره موافق آنکه از مفصل لکاریتم مفروض ۱ و ۲ و .... واحد کاسته باشیم (۲۲۹)

مثلا در این لکاریتم ۵٫۵۸۶۳۶

چون این لکاریتم را با مفصل ۳ در جداول طلب کنیم عدد ما بازاء این میشود ۳۸۵۸ و چون عدد مطلوب را مفصل ۵ است باید صد مرتبه بزرگتر باشد یعنی ۳۸۵۸۰۰ و بهمین وجه معلوم میکنیم که این لکاریتم ۷٫۱۰۵۷۲ بازاء این عدد است ۱۲۷۵۶۰۰۰

چهارم ـ آنکه لکاریتم را مفصِل عدد منفی باشد

پس در استعمال چنین قسم لکاریتمی مفصّل منفی را هیچ اعتنا نکنیم و در جداول در آئیم بطلب لکاریتم مفروض با مفصل ۳ و چون بدست آوریم عدد

ما بازاء این لگاریتم عدد را تبدیل کنیم آنرا بکسر اعشاری بنابر آنکه رقم اول معنی بخش بعد از ممیز در رتبهٔ دهم معادل مفصل منفی

مثلاً در این لگاریتم ۶۲۵۸۳ ر$\bar{4}$ در جداول وارد شده بطلب این لگاریتم ۶۲۵۸۳ ر۳ برآمد و در پهلوی این عدد را ۴۲۲۵ یافتیم و آنوقت که $\bar{4}$ را خواستیم بمفصل مثبت ۳ در واقع ۷ واحد افزودیم پس عدد ۴۲۲۵ بقدر ۱۰۰۰۰۰۰۰ مرتبه بزرگتر از عدد مطلوب است و بنابراین لگاریتم ۶۲۵۸۳ ر$\bar{4}$ متعلق باشد باین کسر ۰٫۰۰۰۴۲۲۵ و می‌بینیم که اولین رقم معنی بخش در مرتبهٔ چهارم افتاده است

و همچنین چون برائیم بطلب کسر ما بازاء این لگاریتم ۱۰۵۷۲ ر$\bar{2}$ بدست آید این عدد ۰٫۰۱۲۷۵۶

پنجم ـ اگر لگاریتم مفروض تمام منفی باشد یا هر مفصلی که فرض شده باشد

پس ابتدا اسم حسابی جزو اعشار لگاریتم را طلب میکنیم و بعد مفصل منفی برای او قرار میدهیم یک واحد بزرگتر از مفصل لگاریتم مفروض و آن وقت لگاریتمی داریم که تنها مفصلش منفی است و راجع میشود بحالت چهارم

مثلاً مطلوبست عددی بازاء این لگاریتم ۶۲۵۸۷ ر۲ − و ظاهر است که

-۲٫ ۵۸۷=۳۰-۲٫۴۶۲۵۸۷-۳=(۳-۲٫۴۶۲۵۸۷)-۳

اما ۳-۲٫۴۲۵۸۷=۰٫۵۷۴۱۳

پس ۳۰ ۴۲۵۸۷-۳=۰٫۵۷۴۱۳-۳=۳̅٫۵۷۴۱۳

و این لکاریتم متعلق است باین عدد ۰٫۰۰۳۷۵۰۸

تنبیه ۱ – هر دو لکاریتمی که بحسب علامت مخالف باشند متعلق شوند بدو عدد متعاکس (ر ۲۲۶ تنبیه ۳) و میتوان مستقیماً معلوم کرد عدد ما بازاء لکاریتم منفی را باید آنرا چنین پنداشت که با علامت + است و بعد عدد ما بازاء آنرا طلب نمود و آنوقت خارج قسمتِ واحد بر این عدد کسری میشود ما بازاء لکاریتم مفروض

اگر مثلاً مطلوب عدد ما بازاء این لکاریتم ۲٫۴۲۵۸۷- باشد طلب میکنیم عدد ما بازاء این لکاریتم را ۲٫۴۲۵۸۷ و آن اینست ۲۶۶٫۶ تا دهم تقریب پس لکاریتم ۲٫۴۲۵۸۷ متعلق باشد بعدد ۲۶۶٫۶ و لکاریتم مخالفش یعنی ۲٫۴۲۵۸۷- متعلق باشد بعدد متعاکس $\frac{۱۰}{۲۶۶۶}=\frac{۱}{۲۶۶٫۶}$ و چون این عدد را تحویل نمائیم باعشار چنین شود ۰٫۰۰۳۷۵۰۹ و قلیل اختلافی هست میان این کسر و کسری که ما سابق (حالت پنجم) یافتیم و آن سبب این هست که ما بازاء لکاریتم ۲٫۴۲۵۸۷ را عددی گرفتیم قدری کوچکتر یعنی ۲۶۶٫۶

وهمین

وبهمین وجه معلوم میکنیم که کسر مابازاء این لکاریتم ۷٫۱۰۵۷۲−

اینست $\frac{1}{12754000}$ چراکه لکاریتم ۷٫۱۰۵۷۲ متعلق است

باین عدد ۱۲۷۵٤۰۰۰ (حالت چهارم)

تنبیه ۲ − آنچه ما در طلب عدد مابازاء لکاریتم مفروض گفتیم تواند در این چند سطر مختصر شود لکاریتم مفروض را بدل کنیم بدیگری که تفصیلش ۳ واحد مثبت باشد و بعد عدد مابازاء این لکاریتم جعلی را بدست آوریم و آنوقت از روی تصرفی که در لکاریتم نموده ایم سهل است یافتن مقداریکه باید عدد نتیجه را دران ضرب یا قسمت کرد

* تنبیه ۳ − در طلب اعداد مابازاء لکاریتمهای مفروضه ما قناعت نمودیم بهمین چهار رقمی که در جنب لکاریتمها ثبت شده و در وقت ضرورت رقم پنجمی را هم بآنها اضافه نمودیم و دورتر از این حد نرفتیم نکته اش اینست که چون اقل تفاضل جدولی اینست ۰٫۰۰۰۰٤ پس اگر چشم از این مقدار بپوشیم عدد مابازاء لکاریتمی که ۰٫۰۰۰۰٤ از آن کاسته شده بقدر واحدی کمتر از مقدار واقعی باشد و اگر خود عوض ۰٫۰۰۰۰٤ یکربع آن را چشم بپوشیم یعنی ۰٫۰۰۰۰۱ آنوقت از عدد بقدر یکربع واحد کاسته یعنی ۰٫۲۵ و بالجمله در آن حالت که بقدر نصف ۰٫۰۰۰۰۱ چشم بپوشیم یعنی ۰٫۰۰۰۰۰۵ عدد مابازاء بقدر نصف ۰٫۲۵ کاسته یعنی ۰٫۱۲۵ و از این قرار اهمال و اغماض در

ادراینجا بقدر ۳۲۸۰۰۰۰۰ و ازدیم

۵ ۰٫۰۰۰۰ تفاضل مابین دو لکاریتم باعث اختلاف ۱۲۵ ر ۰ بشود بنا (مابین) اعداد بازاء

و چون در جداول ۵ رقمی اعشر بسیار اتفاق می افتد که لکاریتمی را بقدر قریب ۵ ۰٫۰۰۰۰ بیفزایند یا بکاهند (در جداول بزرگ لکاریتم عدد ۹۰۷۱ اینست ۳٫۹۵۷۶۵۵۱۷ و در جداول کوچک اینست ۳٫۹۵۷۶۶ پس بسبب این افزایش چنین اتفاق میافتد که ۳٫۹۵۷۶۶ بجای تقریب لکاریتم این عدد باشد ۹۰۷۱٫۱ نه لکاریتم این عدد ۹۰۷۱ چنانچه در جداول مثبت شده) و آنوقت کسب حالات اتفاق میافتد که رقم اعشار بزرگتر یا کوچکتر از مقدار واقعی باشد و بنابراین صحیح و محقق نباشد و بدلیل قوی تر رقم ششم چنین است امّا اگر تفاضل جدولی بزرگ باشد میتوان (بسیار) اعتماد داشت باین دو رقم که بدست آورده اند

تنبیه ۴ع — اگرچه در محاسباتی که بمدد لکاریتم میشود نتوان اعتماد نمود جز باحاد برترین عددی باز فائده و اهمیت لکاریتم خیلی زیاد هست چراکه در امور عادی معاش بندرت محتاج اعداد خیلی بزرگ میشویم و در آنحالتی که بزرگ باشند مثل اعداد نجومی بیشتر محتاج نمیشویم جز لمعرفت آحاد برترین (عدد)

اعمال در لکاریتم

۲۳۴ — جمع — اجزای اعشاری که همگی مثبت هستند بطریق معمول جمع

جمع کنند وبعد بارعایت محفوظات اجزای صحاح را که مفصل باشند جمع جبری
نمایند مثلا در جمع فقرات ذیل

$\overline{۲}$,۵۴۶۷۴
$\overline{۱}$,۷۸۲۱۳
$\overline{۴}$,۶۴۱۳۱
$\overline{۴}$,۹۷۰۱۸

جمع اجزای اعشار این شود ۹۷۰۱۸ را و نویسیم جزء اعشار حاصل را
وبعد ارا بجمع جبری مفصلها بیفزائیم تا مفصل جمع کل چنین شود

۱−۲+۱−۴=−۴

پس جمع لگاریتمها چنین شود $\overline{۴}$,۹۷۰۱۸

۲۳۵− در تفریق − تفاضل اجزای اعشار را بدستور رسمی بگیریم
وبعد مفصلها را تفاضل جبری مثال در تفریقهای ذیل

چهارم	سیم	دوم	اول
$\overline{۳}$,۵۷۴۲۴	۲,۶۵۷۴۲	$\overline{۲}$,۶۴۲۳۱	۳,۶۷۴۹۲
$\overline{۵}$,۷۳۲۵۶	$\overline{۳}$,۷۵۶۳۴	۳,۹۵۱۲۳	۴,۸۶۲۹۴
۱,۸۴۱۶۸	۴,۹۰۱۰۸	$\overline{۶}$,۶۹۱۰۸	$\overline{۲}$,۸۱۱۹۸

مثال اول − بعد از اجرای تفریق اجزای اعشار باقی ماند تفریق از مفصل
۳ ابتدا ۱ را وبعد ۴ پس مفصل تفاضل است ۴−۱−۳ یعنی ۲−

مثال دوم − بعد از اجرای تفریق اجزای اعشاری باقی ماند تفریق از
مفصل ۲− ابتدا ۱ را وبعد ۳ را پس مفصل تفاضل این است

−۲−۱−۳=−۶

مثال سیم - بعد از تفریق اجزای اعشار باقی ماند تفریق از مفصل ۲ ابتدا ۱ را و بعد ۵ - را پس مفصل باقی است ۵ + ۱ - ۳ - یعنی ۱ و هر کدام از این اعمال را میتوان امتحان نمود باینکه تفاضل را بر نکارتیم دوم بیفزائیم تا اول بدست آید

۲۳۶ - در ضرب - قاعده اینست که بدستور رسمی جزو اعشار را که اتمام در مضروب فیه ضرب نمود و بعد از رعایت محفوظ ضرب جبری نمود مفصل در همان مضروب فیه

مثال در ضرب ذیل

$$
\begin{array}{r}
\bar{۲}\text{ر}\ ۸۴۲۵۷ \\
۴ \\
\hline
\bar{۵}\text{ر}\ ۳۳۷۰۲۸
\end{array}
$$

حاصل ضرب ۸۴۲۵۷ ر۰ در ۴ میشود ۳۳۷۰۲۸ ر۳ پس جزو اعشار این حاصل را مینویسیم و ۳ را میفزائیم بر حاصل ضرب ۲- در ۴ یعنی بر ۸ - تا بشود ۵ - و آنوقت حاصل ضرب قطعی چنین میشود

$\bar{۵}$ر ۳۳۷۰۲۸

۲۳۷ - در قسمت - هرگاه مفصل منفی باشد همین قدر کافی است که متصرفی از اضرب مقسوم علیه نمائیم

مثال اول - در قسمت ۶۴۵۱۶ ر$\bar{۴}$ بر ۴

ظاهر است که

$$\frac{\bar{۴},۶۴۵۱۶}{۴} = \frac{-۴+۰,۶۴۵۱۶}{۴} = -۱+۰,۱۶۱۲۹ = \bar{۱},۱۶۱۲۹$$

مثال دوم – در قسمت ۵۴۸۲۴ ,$\bar{۳}$ بر ۴

چنین کنیم

$$\frac{\bar{۳},۵۴۸۲۴}{۲۴} = \frac{-۴+۱,۵۴۸۲۴}{۴} = -۱+۰,۳۸۷۰۶ = \bar{۱},۳۸۷۰۶$$

و هر یک از این اعمال را میتوان امتحان نمود بضرب نمودن خارج قسمت در مقسوم علیه تا مقسوم عود کند

در محاسبات عددلگاریتم

۲۳۸ – در ضرب – اولا مطلوبست حاصل ضرب

۳۱۱۹۴ در ۳,۱۴۱۶

چون حاصل ضرب را م فرض کنیم چنین نویسیم

$$م = ۳۱۱۹۴ \times ۳,۱۴۱۶$$

وازانجا ۳,۱۴۱۶ لگ + ۳۱۱۹۴ لگ = م لگ

$$۳۱۱۹۴\ لگ = ۴,۴۹۴۰۷۱۱$$

$$۳,۱۴۱۶\ لگ = ۰,۴۹۷۱۵۰۹$$

$$م\ لگ = ۴,۹۹۱۲۲۲۰$$

و چون در جداول طلب کنیم عدد بازاء این لگ را با جمع تقریب می یابیم

۹۸۰۰۰ پس ۹۸۰۰۰ = م

ثانیا – مطلوبست حاصل ضرب ۰,۰۳۲۶۲ در ۰,۰۰۵۶

وچون

وچون حاصل مطلوب را م فرض کنیم چنین نویسیم

م = ۰٫۰۳۲۶۲ × ۰٫۰۰۵۶

وازانجا (۲۳۱) لگ ۰٫۰۳۲۶۲ = ۲̄٫۵۱۳۴۸۴۰

لگ ۰٫۰۰۵۶ = ۳̄٫۷۴۸۱۸۸۰

لگ م = ۴̄٫۲۶۱۶۷۲۰

وچون در جداول طلب کنیم عدد ما بازاء این لگارتیم را بدست آید

م = ۰٫۰۰۰۱۸۲۶۷

۲۳۹ - در قسمت - اولا مطلوبست خارج قسمت ۸٫۷۰۴ بر ۰٫۰۳۴

چون خارج قسمت را م فرض کنیم چنین شود

م = ۸٫۷۰۴ / ۰٫۰۳۴

وازانجا لگ م = لگ ۸٫۷۰۴ − لگ ۰٫۰۳۴

لگ ۸٫۷۰۴ = ۰٫۹۳۹۷۱۸۹

لگ ۰٫۰۳۴ = ۲̄٫۵۳۱۴۷۸۹

لگ م = ۲٫۴۰۸۲۴۰۰

واین لگ متعلق است باین عدد ۲۵۶

۲۴۰ - ثانیا - در قسمت ۰٫۰۰۰۵۴۸۲۸ بر ۰٫۰۶۴۹۷

م = ۰٫۰۰۰۵۴۸۲۸ / ۰٫۰۶۴۹۷

وازانجا لگ م = لگ ۰٫۰۰۰۵۴۸۲۸ − لگ ۰٫۰۶۴۹۷

لگ ۰٫۰۰۰۵۴۸۲۸ = ۴̄٫۷۳۹۰۰۲۴

لگ ۰٫۰۶۴۹۷ = ۲̄٫۸۱۲۷۱۲۹

لگ م = ۳̄٫۹۲۶۲۸۹۵

تقریبا م = ۰٫۰۰۸۴۳۹

۲۴۱ – در قوتها – اولا میخواهیم این عدد را ۰٫۳۴ بقوت چهارم برسانیم
چون قوت مطلوب را م فرض کنیم چنین نویسیم

م = ۰٫۳۴^۴

وازانجا لگ م = ۴ لگ ۰٫۳۴

اما لگ ۰٫۳۴ = ۱̄٫۵۳۱۴۷۸۹

پس (۲۳۶) لگ م = ۴ لگ ۰٫۳۴ = ۲̄٫۱۲۵۹۱۵۶

وچون عدد مابازاء این لگارتم را طلب کنیم چنین شود

م = ۰٫۰۱۳۳۶۳۳۷

۲۴۲ – ثانیا – میخواهیم این کسر ۳/۱۱ را بقوت هفتم رسانیم
قوت مطلوب را م فرض کنیم ونویسیم

م = (۳/۱۱)^۷

ازانجا

ازانجا   ۷ لگ (۳/۱۱) = لگ م

اما   لگ ۱۱ − لگ ۳ = لگ (۳/۱۱)

لگ ۳ = ۰٫۴۷۷۱۲۱۳

لگ ۱۱ = ۱٫۰۴۱۳۹۲۷

لگ ۳ − لگ ۱۱ = ۱̄٫۴۳۵۷۲۸۶

پس   لگ م = ۷ (لگ ۳ − لگ ۱۱) = ۴̄٫۰۵۰۱۰۰۲

م = ۰٫۰۰۰۱۱۲۲۲۷۷

۲۴۳ - ۱- استخراج ضلع - اولا مطلوب است کعب عدد ۲

چون ضلع مطلوب را م فرض کنیم چنین نویسیم

م = ∛۲

وازانجا   لگ م = لگ ۲ / ۳ = ۰٫۳۰۱۰۳ / ۳ = ۰٫۱۰۰۳۴۳۳

م = ۱٫۲۵۹۹۲۱

۲۴۴ - دوم مطلوب است ضلع خمس این عدد ۰٫۰۰۹۴۵۶۷

چون مجهول را م فرض کنیم چنین نویسیم

م = ⁵√۰٫۰۰۹۴۵۶۷

ازانجا   لگ م = لگ ۰٫۰۰۹۴۵۶۷ / ۵

اما لگ ۰٫۰۰۹۴۵۶۷ = ۳̄٫۹۷۵۷۳۹۶ = ۵̄ + ۲٫۹۷۵۷۳۹۶

پس   لگ م = (۵̄ + ۲٫۹۷۵۷۳۹۶) / ۵ = ۱̄٫۵۹۵۱۴۷۹

م = ۰٫۳۹۳۶۸۴

۲۴۵ – سیم – مطلوب است استخراج کعب این کسر $\frac{7}{15}$

چون ضلع مطلوب را م فرض کنیم چنین نویسیم

$$\text{م} = \sqrt[3]{\frac{7}{15}}$$

وازانجا

$$\text{لگ م} = \frac{\text{لگ } 7 - \text{لگ } 15}{3}$$

وچون

$$\text{لگ } 7 = 0{,}8450980$$
$$\text{لگ } 15 = 1{,}1760913$$
$$\text{لگ } 7 - \text{لگ } 15 = \bar{1}{,}6690067$$

پس

$$\text{لگ م} = \frac{\bar{1}{,}6690067}{3} = \frac{\bar{3}+2{,}6690067}{3} = \bar{1}{,}8896689$$

$$\text{م} = 0{,}7756555$$

در استعمال متمم لگارتیم

۲۴۶ – باستعمال لگارتیم بیشتر اعمال متعلقه باعداد منجر میشود بجمع وتفریق وحال گوئیم که آن محاسبات را میتوان نیز مختصر تر نمود بانکه یک عمل جمع و یک تفریق را بدل کرد بعمل جمعی ساده مثلا عوض آنکه A لگ را از چیزی وضع کنیم A لگ – را بران بیفزائیم وچنین تبدیل را هیچ اشکالی نیست چراکه اگر مفصل را ا فرض کنیم وجزو اعشار لگارتیم A را گ آنوقت

$$\text{لگ } A = \text{ا} + \text{گ}$$

وازانجا بترتیب

$$-\text{لگ } A = -\text{ا} - \text{گ}$$
$$-\text{لگ } A = -\text{ا} - 1 + 1 - \text{گ}$$
$$-\text{لگ } A = -(\text{ا}+1) + 1 - \text{گ}$$

وتفاضل

وتفاضل مثبت لگ − ۱ را متمم کسر اعشار لگ گوئیم تا آ

پس برای تغییر علامت لگاریتم عددی مثل A قاعده اینست که وحد اے
بر مفصل ب آن بیفزائیم و علامتش را تغییر دهیم و بعد در دنبال این
مفصل متمم جزو اعشاری لگاریتم را تا واحد گرفته بنویسیم

و سابق در ۲۳۲ نمبر ۲ ذکر نموده ایم که برای یافتن متمم تا واحد باید جمیع ارقام را
از ۹ تفریق نمود و رقم اخیر طرف راست را از ۱۰

و این کار چنان سهل و چابک است که میتوان عمل حسابش گفت

۲۴۷ — هرگاه بنا بر آنچه در فوق بیان کردیم علامت لگاریتم عددی را تغییر دهیم
آنرا متمم لگاریتم آن عدد گوئیم پس متمم لگاریتم عدد A اینست لت A — یا
لگ − ۱ + (۱ + ح) −

بهذا لت ۷ = ۰٫۸۴۵۰۹۸۰ متمم لت ۷ = ۱٫۱۵۴۹۰۲۰
لت ۶۸۲۲ = ۳٫۸۳۳۹۱۱۷ متمم لت ۶۸۲۲ = ۴٫۱۶۶۰۸۸۳
لت ۰٫۰۰۰۶۷۸ = ۴٫۸۳۱۲۲۹۷ متمم لت ۰٫۰۰۰۶۷۸ = ۳٫۱۶۸۷۷۰۳

این فقره را هم سهل است ملتفت شوید که متمم لگاریتم عددی بعینه لگاریتم عکس
آن عدد است ۲۲۶ نمبر ۳

چراکه $\;$ لت $\frac{1}{A}$ = لت A −

و $\;$ لت $\frac{1}{A}$ = لت ۱ − لت A = ۰ − لت A = − لت A

۲۴۸ - حال اینجا یک مثال در دستور استعمال متمم لگاریتم بیاوریم

مثلا میخواهیم این حاصل ضرب را حساب کنیم

$$م = \frac{۴۵,۶۷ \times ۳,۴۵ \times ۹}{۱,۴۵ \times ۷۹}$$

بقاعدهٔ معمول

لت م = لت ۴۵,۶۷ + لت ۳,۴۵ + لت ۹ − لت ۱,۴۵ − لت ۷۹

لت ۴۵,۶۷ = ۱,۶۵۹۶۳۱۰
لت ۳,۴۵ = ۰,۵۳۷۸۱۹۱
لت ۹ = ۰,۹۵۴۲۴۲۵
۳,۱۵۱۶۹۲۶

لت ۱,۴۵ = ۰,۱۶۱۳۶۸۰
لت ۷۹ = ۱,۸۹۷۶۲۷۱ } = ۲,۰۵۸۹۹۵۱

۱,۰۹۲۶۹۷۵

لت م = ۱,۰۹۲۶۹۷۵ و م = ۱۲,۳۷۹۳۴

و موافق دستور متمم لگاریتم چنین نویسیم

لت ۴۵,۶۷ = ۱,۶۵۹۶۳۱۰
لت ۳,۴۵ = ۰,۵۳۷۸۱۹۱
لت ۹ = ۰,۹۵۴۲۴۲۵
متمم لت ۱,۴۵ = $\overline{۱}$,۸۳۸۶۳۲۰
متمم لت ۷۹ = $\overline{۲}$,۱۰۲۳۷۲۹
لت م = ۱,۰۹۲۶۹۷۵

و این همان نتیجه است که در فوق یافتیم

از روی همین یک مثال رجحان استعمال متمم لگاریتم معلوم میشود

در ربح مرکب

۲۴۰ - تنخواهی را که مرابحه داده غالب منافع آنرا سالیانه مطالبه و دریافت میکنند اما اتفاق میافتد که منافع را بر سرمایه می افزایند و سرمایه تازه قرار میدهند و از این قرار همواره زیادتر میشود و سود را سرمایه ساختن گویند یا مرابحه مرکب

در حساب ذکر شده که نرخ مرابحه عبارت است از مبلغی که یکصد تومان در یکسال بما عاید میکند اما در مسائل مرابحه مرکب محض تسهیل عمل ربح یکتومان را نرخ قرار دهند و چون این نرخ را r فرض کنیم گوئیم $r = ۰٫۰۵$ و $r = ۰٫۰۴۵$ بحسب آنکه از قرار صدی ۵ یا صدی ۴٫۵۰ معامله نموده باشیم

بعد از یکسال چون بر یکتومان ربح آنرا بیفزائیم میشود $1 + r$ و اگر مثلاً سرمایه ما ۱۵۰ برابر میبود میشد $150(1 + r)$ و بطور کلی سرمایه a بعد از یکسال اول اصلا فرعا میشد $a(1 + r)$ اما این سرمایه $a(1 + r)$ بعد از سال دوم بهمان قرار منفعتی میدهد و بنابراین بشرح مذکور اصلا فرعا میشود

$a(1 + r)(1 + r) = a(1 + r)^2$ و در ابتدای سال سیم سرمایه چنین میشود $a(1 + r)^2$ و در آخر سال سیم اصلا فرعا چنین میشود

$$a(1 + r)^2(1 + r) = a(1 + r)^3$$

و چون باین دستور پیش رویم سرمایه a بعد از n سال میشود $a(1 + r)^n$

از این

ازاین روی معلوم میشود که در تحصیل مبلغ سرمایه که بربح مرکب معامله شده باشد
باید آن سرمایه را ضرب نمود در مبلغی که یک تومان در مدت سال
اصلا فرعا میشود بعد ازانکه بعدد سالهای مرابحه فوقت و ترقی
داده باشیم

حال چون مبلغی را که سرمایه س بربح مرکب بعد از م سال اصلا فرعا میشود
ا فرض کنیم چنین شود

$$\text{ا} = \text{س}(1+\text{ر})^{\text{م}}$$

وچون سه اصل ازاین اصول چهارگانه ا و س و ر و م معلوم باشد
میتوان اصل چهارم را استخراج نمود

وحال در دستور مذکور بترتیب یک یک ازاین مقادیر را مجهول فرض میکنیم
وآنرا استخراج میکنیم

۲۵۰ – اول برای استخراج ا بعمل لگارتم چنین مینویسیم

$$\text{لث ا} = \text{لث س} + \text{م لث}(1+\text{ر})$$

۲۵۱ – در استخراج مقدار س

$$\text{س} = \frac{\text{ا}}{(1+\text{ر})^{\text{م}}}$$

وازانجا

$$\text{لث س} = \text{لث ا} - \text{م لث}(1+\text{ر})$$

۲۵۲ – در استخراج م

چون

چون مجهول ما اینجا درجهٔ قوت است ناچاریم از استعمال لگاریتم

$$\text{لگ}\,A = \text{لگ}\,a + n\,\text{لگ}\,(1+r)$$

$$\text{لگ}\,A - \text{لگ}\,a = n\,\text{لگ}\,(1+r)$$

$$n = \frac{\text{لگ}\,A - \text{لگ}\,a}{\text{لگ}\,(1+r)}$$

۲۵۳ – در استخراج r

$$(1+r)^n = \frac{A}{a}$$

$$1+r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}}$$

$$r = \sqrt[n]{\frac{A}{a}} - 1$$

وچون آنرا لگاریتم آوریم چنین شود

$$n\,\text{لگ}\,(1+r) = \text{لگ}\,A - \text{لگ}\,a$$

$$\text{لگ}\,(1+r) = \frac{\text{لگ}\,A - \text{لگ}\,a}{n}$$

وچون $1+r$ بدست آمد خود r معلوم شود

تنبیه – در آن حالت که n عدد سنین صحیح نباشد n را بماهها نویسیم باین شکل $\frac{m}{12}$ واگر روز باشد چنین $\frac{n}{360}$ واینجا حرف m عبارت است از ۱۳ و ۱۴ و ۱۵ .... ماه وحرف n عبارت از ۳۶۱ روز و ۳۶۲ روز و ۳۶۳ روز وغیره

هرگاه عدد کسری باشد وعمل را لگاریتم جاری کنیم البته نتیجه اش همان نخواهد شد

شد که عنابعل حساب استخراج میشود امّا اختلاف آن معنابه نیست

واینجا من باب مشق برمتعلمین است که بدستورات مذکوره مسائل ذیل را حل کنند

۱۵۰ – شخصی مبلغ ۸۵۰ تومان سرمایه را از قرار صد ۵ بربح مرکب گذا

در ظرف ۸ سال پس در آخر مدّت بهمه جهة چه مبلغ عاید او میشود

۱۵۱ – شخصی مبلغ مجهولی را بربح مرکب معامله نمود از قرار صد ۵ در ده

سال و بعد از آن مدّت اصلا فرعا مبلغ ۷۳۳ تومان عاید او شد پس

اصل سرمایه او چه مبلغ بوده

۱۵۲ – مطلوب است مدّتی که مبلغ ۴۵۰ تومان از قرار صد ۵ بربح

مرکب اصلا فرعا مبلغ ۷۳۳ تومان عاید سازد

۱۵۳ – مبلغ ۸۰۰۰ تومان را بربح مرکب معامله نمودیم و بعد از چهار

سال اصلا فرعا شد مبلغ ۹۷۲۴ تومان مطلوب است نرخ این معامله

مسئله – تنخواهی از قرار صد ۵ و از قرار صد ۴ بربح مرکب معامله

شده میخواهیم بدانیم در هر دو فرض بعد از چند سال مضاعف میشود

* در مسئله سالیانه که قسط السنین نیز گویند

۲۵۴ – و آن عبارت است از اقساط متساویه سالیانه که شخص مدیون

بعهده میگیرد که تا بعد از مدّتی بکلّی از دین خارج شود در معامله مرکبه

۲۵۵ – مسئله – شخصی مبلغ ۸ تومان قرض مرابحه نمود و میخواهد

در ظرف

تنبیه – این مسئله و چند مسئله بعد از این قبیل را در ضمن تقسیم الکل به تفصیل بنویسم

درظرف n سال به n قسط متساوی ادا کند پس مطلوب

مبلغ a که هر ساله دادنی است

مبلغ A بعداز n سال اصلا فرعا میشود $A(1+r)^n$ (۲۴۹)

مبلغی است که باید بشخص سودخوار عاید شود و جمع اقساط با انضمام منافع

باید معادل این مبلغ شود و شخص مقروض یک سال بعداز استقراض قسط

که بدهد a است و بنابراین (این) مبلغ در دست سودخوار بمعامله دیگر میرود

درظرف $n-1$ سال و چنین میشود

$$a(1+r)^{n-1}$$

قسط دوم چنین میشود $a(1+r)^{n-2}$

و قسط سیم در دست سودخوار چنین $a(1+r)^{n-3}$

و قسط چهارم چنین $a(1+r)^{n-4}$

- - - - - - - - - -

و سال قبل از آخر چنین $a(1+r)$

و بالجمله قسط اخیر را که پرداخت بعداز n سال نزد سودخوار همان خود

a است نه زیاده و حالا مقادیر

$$a,\ a(1+r),\ a(1+r)^2 \ldots a(1+r)^{n-3},\ a(1+r)^{n-2}$$

$$a(1+r)^{n-1}$$

سلسله تشکیل کنند هندسی که جمله اولش a است و جمله آخر $a(1+r)^{n-1}$

و عدد

و قدر سنبش $n+1$ مجموع جمله‌های این سلسله میشود (۲۰۵) چنین

$$\frac{a(1+r)^{n-1}\times(1+r)-a}{r} = \frac{a(1+r)^{n}-a}{r}$$

امّا چون $\frac{a(1+r)^{n}-a}{r}$ باید مساوی شود با $A(1+r)^{n}$ این معادله تشکیل شود

$$A(1+r)^{n} = \frac{a(1+r)^{n}-a}{r} = \frac{a\left[(1+r)^{n}-1\right]}{r}$$

و از آنجا

$$a = \frac{A\,r\,(1+r)^{n}}{(1+r)^{n}-1}$$

در این دستور نیز میتوان هر یک از چهار اصل A و a و n و r را مجهول فرض نمود و آنرا از روی استخراج کرد بنا بر آنکه سه جملهٔ دیگر معلوم باشد امّا تعیین r قدری مشکل است چراکه راجع میشود بحلّ معادله درجه n ام

و من باب مشق دانستن این دستور مسائل ذیل را حل میکنیم

۲۵۶ - مسئله ۱ - شخصی مبلغ ۸۰۰۰ تومان قرض نموده از قرار صدی ۵ و میخواهد در ظرف ۱۲ سال بقسط السنین خود را مستخلص کند مطلوبست مبلغ هر قسط

مفروضات مسئله $A=8000$ و $r=0.05$ و $n=12$

$$a = \frac{8000\times 0.05\times(1.05)^{12}}{(1.05)^{12}-1}$$

لگ ۱٫۰۵ = ۰٫۰۲۱۱۹

۱۲ لگ ۱٫۰۵ = ۰٫۲۵۴۲۸

این لگاریتم نظیر است با این عدد ۷۹۵۹ را پس

$$(1.05)^{12} = 1.7959$$

و $$(1.05)^{12} - 1 = 0.7959$$

و بنابراین $$x = \frac{8000 \times 0.05 \times 1.7959}{0.7959} = 902.58$$

و از این قرار باید در آخر هر سال مبلغ ۹۰۲٫۵۸ تومان بدهد تا در آخر ۱۲ سال قرض ۸۰۰۰ تومان بازعش ادا شده باشد

۲۵۷ - مسئله ۲ - چه مبلغ است قرضی که بخواهند بقسط السنین در ظرف ۱۲ سال هر سالی ۹۰۲٫۵۸ تومان بدهند بنا برآنکه نرخ از قرار صدی ۵ باشد

از دستور $a = \frac{A r (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ مقدار A را استخراج کنیم

ابتدا $$a\left[(1+r)^n - 1\right] = A r (1+r)^n$$

و بالجمله $$A = \frac{a\left[(1+r)^n - 1\right]}{r(1+r)^n}$$

مفروضات $a = 902.58$ و $n = 12$ و $r = 0.05$

$$\log 1.05 = 0.02119$$

$$12 \log 1.05 = 0.25428$$

و آن بازاء این عدد است 1.7959 پس

$$(1.05)^{12} = 1.7959$$

و $$(1.05)^{12} - 1 = 0.7959$$

و بنا

دبنابراین $A = \frac{902{,}58 \times 0{,}7959}{0{,}05 \times 1{,}7959} = 8000$ تومان

۲۵۸ — مسئلهٔ ۳ — در ظرف چه مدت ادا شود دین مبلغ ۸۰۰۰ تومان را از قرار صدی ۵ که بخواهیم بقسط السنین سالی ۹۰۲٫۵۸ تومان بدهیم

در این دستور $a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$ مقدار n را استخراج کنیم

$$a = \frac{Ar(1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

$$a(1+r)^n - a = Ar(1+r)^n,$$

$$a(1+r)^n - Ar(1+r)^n = a$$

و چون $(1+r)^n$ را عامل مشترک گذاریم چنین شود

$$(1+r)^n(a - Ar) = a$$

و چون عمل لگاریتم را در این دستور جاری کنیم چنین شود

$$n \log(1+r) + \log(a - Ar) = \log a$$

$$n \log(1+r) = \log a - \log(a - Ar)$$

و از اینجا چنین استنباط کنیم

$$n = \frac{\log a - \log(a - Ar)}{\log(1+r)}$$

معلومات $A = 8000$ و $a = 902{,}58$ و $r = 0{,}05$

$$\log 902{,}58 = 2{,}95549$$

$$\begin{array}{r} ۲,۹۵۵۴۹ \\ \text{لت}(a-Ar) \text{ یا لت } ۵۰۲,۰۸ = ۲,۷۰۱\ ۲۰ \\ \hline \text{تفاضل } ۰,۲۵۴\ ۲۹ \\ \text{لت } ۱,۰۵ = ۰,۰۲۱\ ۱۹ \end{array}$$

$$n = \frac{۲,۹۵۵۴۹ - ۲,۷۰۱۲۰}{۰,۰۲۱۱۹} = \frac{۰,۲۵۴۲۹}{۰,۰۲۱۱۹} = ۱۲$$

مسئله- دولت ایران در سال قبل ۳۱۷ هجری مبلغ بیست وچهار کرور تومان از دولت روس قرض نمود از قرار صدی ۵ و قرار داده که به تقسیط السنین در ظرف ۷۰ سال از وجه گمرک کارسازی نماید میخواهیم بدانیم که هر سال چه مبلغ باید بدهد

حل این مسئله بدستور گذشته بر عهده شاگرد است

۲۵۹ - مسئله- شخصی در اول هر سال مبلغ a تومان بربح مرکب و بنرخ معین در بانکی گذاشت میخواهیم بدانیم بعد از انقضای n سال چه مبلغ باو میرسد اصلا و فرعا

مبلغ اول a در مدت n سال میشود $a(1+r)^{n}$

و مبلغ دوم در مدت $n-1$ سال میشود $a(1+r)^{n-1}$

و مبلغ سیم در مدت $n-2$ سال میشود $a(1+r)^{n-2}$

و مبلغ چهارم در مدت $n-3$ سال میشود $a(1+r)^{n-3}$

. . . .

. . . .

و بالجمله

و بالجمله مبلغ آخری که همین مدت یکسال گذاشته شده میشود $a(1+r)$

پس ترکیب این مقادیر مختلفه

$a(1+r)$ و $a(1+r)^2$ و $a(1+r)^3 \ldots \quad a(1+r)^{n-2}$ و

$a(1+r)^{n-1}$ و $a(1+r)^n$

سلسلهٔ هندسی تشکیل شود که جملهٔ اولش اینست $a(1+r)$ و جملهٔ آخرش

$a(1+r)^n$ و قدر نسبتش $1+r$

حال چون A را مجموع جمله‌های این سلسله فرض کنیم چنین شود (۲۰۵)

$$A = \frac{a(1+r)^n(1+r) - a(1+r)}{r} = \frac{a(1+r)(1+r)^n - a(1+r)}{r}$$

و چون $a(1+r)$ را در عامل مشترک گذاریم چنین شود

$$A = \frac{a(1+r)\{(1+r)^n - 1\}}{r}$$

و حال این دستور را در مسائل ذیل جاری کنیم

۲۶۰ - مسئله ۱ - در ظرف پانزده سال متوالی شخصی هر سال مبلغ ۲۰۰ تومان بربح مرکب از قرار صدی ۵ به بانک گذاشت میخواهیم بدانیم که بعد از انقضای آن مدت دارای چه مبلغی خواهد شد

مفروضات $a = 200$ و $r = 0.05$ و $n = 15$

لگ ۱٫۰۵ = ۰٫۰۲۱۱۹

۱۵ = لگ ۱٫۰۵ = ۰٫۳۱۷۸۵

این

این لگاریتم بازاء این عدد است ۲٫۰۷۹ پس

$$(1,05)^{15} = 2,079$$

و $$(1,05)^{15} - 1 = 1,079$$

زمان

$$A = \frac{200 \times 1,05 \times 1,079}{0,05} = 4531,80$$

۲۶۱ - مسئله ۲ - شخصی در ظرف ۱۵ سال اول هر سال مبلغی از قرار صد ۵ بربح مرکب در بانک گذاشته و در آخر صاحب این مبلغ ۴۵۳۱٫۸۰ تومان تنخواه شده میخواهیم بدانیم که هر سال چه مبلغ گذاشته است

در دستور $$A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r} = \frac{a(1+r)\left[(1+r)^{n} - 1\right]}{r}$$

مقدار a مجهول است

$$A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r}$$

$$A r = a(1+r)^{n+1} - a(1+r)$$

چون a را بعامل مشترک گذاریم چنین شود

$$A r = a\left[(1+r)^{n+1} - (1+r)\right]$$

و از آنجا $$a = \frac{A r}{(1+r)^{n+1} - (1+r)}$$

مفروضات $A = 4531,80$ و $r = 0,05$ و $n+1 = 16$

$$\log 1,05 = 0,02119$$

$$16 \log 1,05 = 0,33904$$

و آن

و آن بازاء این عدد است ۲٫۱۸۳

تا یکصدم تقریب $200 = \frac{226{,}59}{1{,}133} = \frac{226{,}59}{2{,}183-1{,}05} = a$

۲۶۲ - مسئله ۳ - هرگاه هر سالی ۲۰۰ تومان در بانک گذارم از قرار صدی ۵ بربح مرکب پس چند سال باید تا دارای این مبلغ ۴۵۳٫۸۰ تومان شویم.

اینجا مجهول مسئله n است

از روی این دستور $A = \frac{a(1+r)^{n+1} - a(1+r)}{r}$ چنین نویسیم

$$Ar = a(1+r)^{n+1} - a(1+r)$$

$$a(1+r)^{n+1} = Ar + a(1+r)$$

و چون لگاریتم آنها را بگیریم چنین شود

$$\text{لگ}\,a + (n+1)\,\text{لگ}\,(1+r) = \text{لگ}\,[Ar + a(1+r)]$$

$$(n+1)\,\text{لگ}\,(1+r) = \text{لگ}\,[Ar + a(1+r)] - \text{لگ}\,a$$

$$n+1 = \frac{\text{لگ}\,[Ar + a(1+r)] - \text{لگ}\,a}{\text{لگ}\,(1+r)}$$

$$n = \frac{\text{لگ}\,[Ar + a(1+r)] - \text{لگ}\,a}{\text{لگ}\,(1+r)} - 1$$

مفروضات $A = 453{,}80$ و $a = 200$ و $r = 0{,}05$

$\text{لگ}\,(Ar + a(1+r))$ یا $\text{لگ}\,436{,}59 = 2{,}64007$

$\text{لگ}\,200 = 2{,}30103$

تفاضل $= 0{,}33904$

$\text{لگ}\,1{,}05 = 0{,}02119$

$$n=\frac{۲٫۶۴۰۰۷-۲٫۳۰۱۰۳}{۰٫۰۲۱۱۹}-۱=\frac{۰٫۳۳۹۰۴}{۰٫۰۲۱۱۹}-۱=۱۶-۱=۱۵$$

فصل پانزدهم

در ذکر مسائل اکثر و اقل

۲۶۳- مقدار تغییر پذیر آنست که مثلا x بتواند جمیع اندازه های ممکنه درآید از ∞- تا ∞+ (وچنین تلفظ کنید منهای بی نهایه تا بعلاوه بی نهایه) وامثال چنین کثیر الجمله ها x^2-3x و $6+5x-x^2$ و ... را مقدار وکار ساز مقدار تغییر پذیر x گوئیم

اندازهٔ اکثر کمیت تغییر پذیری عبارت از مقداریست از آن کمیت که بزرگتر باشد از آنها که بلاواسطه با او مقدم اند یا از او مؤخر

و اندازهٔ اقل کمیت تغییر پذیر آن است که کوچکتر باشد از آنها که بلا فصل با او مقدم اند یا از او مؤخر

بنابراین تعریفات چنین معلوم میشود که اندازه اکثر کمیت نه چنان است که مطلقا بزرگتر باشد از جمیع اندازه های آن و بلکه بزرگترین مقادیر کمیت تغییر پذیر را اکثر مطلق گوئیم و کوچکتر آنها را اقل مطلق

مثلا در منحنی مارپیچ KL و مستقیم GH که واقع هست در همان سطح فاصلهٔ منحنی KL از خط GH معلوم است تغییر میکند و اکثرش بر ۱۴ است در C و E و اقلش بر B و D و فاصله DD چون بزرگتر است از فاصله

AA' معلوم میشود که ممکن است اقلی بزرگتر باشد از اکثری و بالعکس هرگاه کمیتی ابتدا از ∞ − همواره ترقی کند تا ∞ + و یا همواره تنزل کند از ∞ + تا ∞ − گوئیم که آنرا نه اکثریست نه اقلی

دستور حلّ مسائل اکثر و اقلّ

۲۶۴ — تعیین مقادیر اکثر و اقلِ مدارات مسئله است خیلی مهم امّا از روی اصول جبر و مقابله نتوان درست این مسئله را بکمال حل نمود امّا در بسیاری از مقامات توان بسهولت مقادیر اکثر و اقل مدار را معلوم نمود

در راهی که ما پیش گرفته ایم عبارت از این است که بطلبیم مابین چه حدودی میتوان مدار را تغییر داد تا آنکه مقادیر مجهول که نظایر آنها باشند حقیقی و واقعی بشوند

پس هر وقت بخواهیم مسئلهٔ اکثر یا اقل مداری را باین دستور استخراج کنیم همین قدر کافی است که آن مدار را معادل کنیم با مقدار اختیاری مفروض m و ببینیم که مابین کدام حدود میتوان m را تغییر داد تا آنکه مقادیر x همه حقیقی شوند و باین راه مقادیر اکثر و اقل مدار بدست آیند و بعد مقادیر متغیر پذیر x که نظایر آنها باشند

و ما حالا در طی چند مثال مشکلات این بیان را توضیح کنیم

۲۶۵ — مسئلهٔ اوّل — میخواهیم اکثر مقدار این مدار را بدست آوریم

اوریم $۳ - x^{۲}$

پس بدستور مذکور مقداری برای این مدار فرض میکنیم مثل m باین صورت

$$۳ - x^{۲} = m$$

وازانجا $x^{۲} - ۳ + m = ۰$

وچون این معادله را نسبت به x حل کنیم چنین شود

$$x = \pm\sqrt{۳ - m}$$

پس نظر بآنکه x حقیقی شود نه موهوم (۱۲۷) باید مقدار زیر رادیکال مساوی شود با صفر یا بزرگتر ازان باشد

واین شرط حقیقی بودن مقدار تغییر پذیر x چنین نوشته شود

$$۳ - m \geq ۰$$

وازانجا $m \leq ۳$

وازاین قرار m نتواند از ۳ تجاوز کند وبنابراین مقدار اکثر m باندازه ۳ هست ودراینحال رادیکال معدوم میشود ومیماند $۰ = m$

٢٦٤ - مسئله ٢ - میخواهیم اقل مقدار این مدار را $۱ + x^{۲}$ معلوم کنیم

پس قرار میدهیم $۱ + x^{۲} = m$

وازاین معادله نتیجه میشود $x = \pm\sqrt{m - ۱}$

ونظر

ونظر بآنکه x حقیقی شود باید چنین باشد $m-1 \leq 0$

پس مقدار اقلی که بتوان به m نسبت داد چنین است $m=1$

ودر این حال رادیکال معدوم میشود ونتیجه چنین $x = 0$

۲۶۴ مکرر ـ مسئله ۳ ـ مطلوبست مقادیر اکثر واقل

این مقدار x^2-5x+6

چنین قرار میدهیم $x^2-5x+6=m$

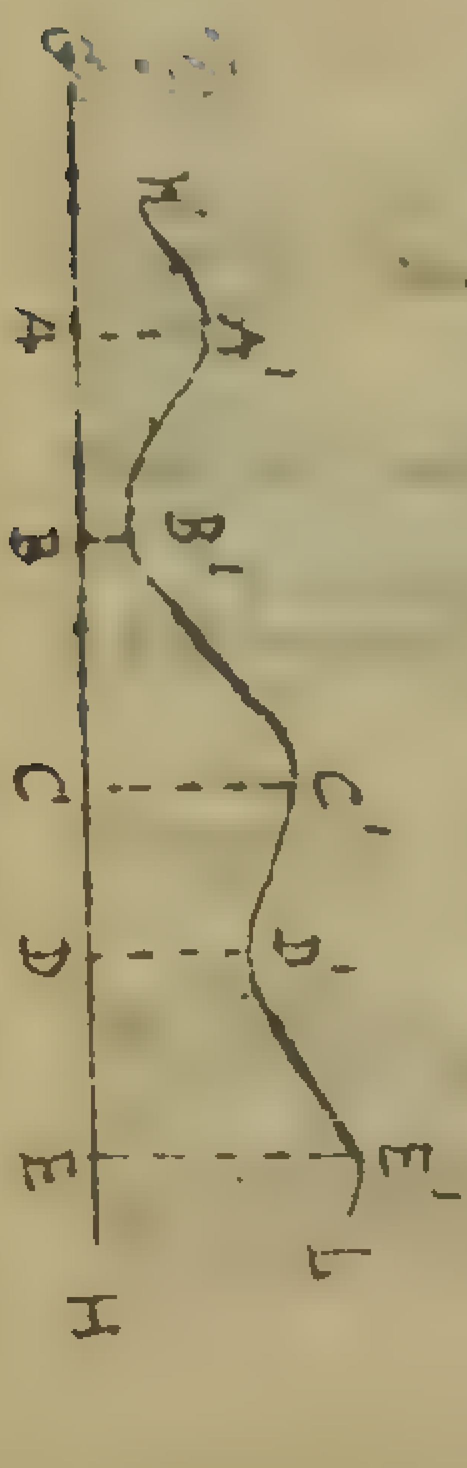
وازآنجا $x^2-5x+6-m=0$

وچون این معادله را حل کنیم چنین شود

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25-4(6-m)}}{2}$$

وچون زیر رادیکال را مختصر کنیم چنین

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1+4m}}{2}$$



شکل صفحه ۲۱۹

پس نظر بآنکه x حقیقی شود باید چنین نوشت

$$1+4m \leq 0$$

$$4m \leq -1$$

$$m \leq -\frac{1}{4}$$

وبنابراین مقدار اقل چنین شود

$$m = -\frac{1}{4}$$

وبازاء $-\frac{1}{4} = m$ چنین شود

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1 + 4 \times -\frac{1}{4}}}{2}$$

یا
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{1 - 1}}{2}$$

پس رادیکال معدوم میشود و آنوقت $x = \frac{5}{2}$ و بنا براین اقل مقدار مدار بازاء $x = \frac{5}{2}$ است و امّا اکثر مقدار اینجا موجود نیست چراکه شرطش همین است که کوچکتر باشد از $\frac{1}{4}$ - امّا تواند ترقی کند از $\frac{1}{4}$ - تا $\infty +$ هرچه فرض کنید

۲۶۶ مکرّر - مسئلهٔ ۴ - مطلوبست حدّ دیکه بتوان در میان تغییر داد حاصل ضرب دو عاملی را که مجموعشان ثابت باشد و مساوی a

پس اگر یکی از دو عامل را x فرض کنیم دیگری میشود $x - a$ و چون حاصل ضرب آنها باید اکثر مقدار شود از او برابر m فرض میکنیم و چنین شود

$$x(a - x) = m$$

یا
$$-x^2 + ax = m$$

یا
$$x^2 - ax + m = 0$$

و چون این معادله را حل کنیم چنین شود

$$x = \frac{a \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - m}}{2}$$

پس شرط حقیقی شدن x اینست که $m \leq \frac{a^2}{4}$

پس مقدار اکثر m است $m = \frac{a^2}{4}$

وبازاء این فرض رادیکال معدوم میشود وآن وقت

$$x = \frac{a}{2}$$

وچون یکی از دو عامل شد $\frac{a}{2}$ دیگری نیز چنین شود $\frac{a}{2}$ وآنوقت دو عامل متساوی میشوند

وازاین قرار حاصل ضرب دو عاملی که مجموعشان ثابت باشد وقتی اکثر مقدار میشود که آن دو عامل متساوی باشند

واکثر مقدار حاصل ضرب این است $\frac{a}{2} \times \frac{a}{2}$ یا $\frac{a^2}{4}$ وازاین روی چنین نتیجه میشود که حاصل ضرب تواند از $-\infty$ تغییر کند تا $\frac{a^2}{4}$ مثلا حاصل ضرب دو عاملی که مجموعشان ۵ باشد تواند تغییر کند از $-\infty$ تا $\frac{5}{2} \times \frac{5}{2}$ یعنی تا $\frac{25}{4}$

واین نکته را توان زود ملتفت شد که واقعا حاصل ضربهای بیشمار داریم تا برسیم به $\frac{25}{4}$ چراکه در حالات عدیده تواند مجموع دو عامل ۵ شود مثلا فرض کنیم یکی ۱۲ باشد آنوقت دومی میشود ۱۲ − ۵ یا ۷−

ومجموع این دو میشود ۷− ۱۲ یا ۵

تنبیه — هرگاه محیط مستطیلی را ثابت $2p$ فرض کنیم و p علامت مجموع قاعده وارتفاع آن باشد اگر یکی از دو بعد را x فرض کنیم

دیگری

دیگری میشود $p - x$ و مساحت

$$x(p - x)$$

و در فوق ذکر شد که این حاصل ضرب وقتی اکثر میشود که دو عامل برابر باشند
پس درمیان جمیع مستطیلات که صاحب یک محیط باشند
بزرگتر از همه شکل مربع است

باب دوّم

فصل اوّل
در تفصیل مسائل سیّاله در جبر اوّل

۲۶۷ - تعریف - مسائل غیر معینه یا سیّاله آنها باشند که چون بمعادله درآیند عدد معادلات کمتر از عدد مجهولات باشند و غرض از تفصیل سیّاله طلب جوابهای صحیح مثبت مسئلهٔ سیّاله است

۲۶۸ - مسئلهٔ اوّل - مطلوبست یافتن دو عدد که مجموعشان ۷ باشد

این مسئله سیّاله است چرا که دارای دو مجهول است. و از میان مسئله یک معادله بیش صورت نبندد $x + y = 7$

و از آنجا $x = 7 - y$

و چون منظور ما جوابهای صحیح و مثبت است y را بترتیب برابر ۱ و ۲ و ۳ و ... بگیریم امّا بازاء هر مقدار y مقداری از x را نظیر است

مثلاً چون فرض کنیم $y = 1$ حاصل شود

$$x = 7 - 1 = 6$$

و چون قرار دهیم $y = 2$ و $y = 3$ و ....

چنین شود $x = 7 - 2 = 5$ و $x = 7 - 3 = 4$

پس مسئلهٔ معهوده صاحب شش جواب ذیل میشود

$$x = ۶ \text{ و } ۵ \text{ و } ۴ \text{ و } ۳ \text{ و } ۲ \text{ و } ۱$$

$$y = ۱ \text{ و } ۲ \text{ و } ۳ \text{ و } ۴ \text{ و } ۵ \text{ و } ۶$$

واما فرض ۷ برای y صحیح نیست چراکه در اینحالت میشود

$$x = ۷ - ۷ = ۰$$

۲۶۹ - مسئله ۲ - بچند وجه میتوان مبلغ ۵۵ قران قرض را از پولهای ۲ هزاری و ۵ هزاری ادا نمود

عدد پولهای ۲ هزاری را x فرض کنیم و عدد ۵ هزاریها را y پس از صورت مسئله این معادله تشکیل شود

$$۲x + ۵y = ۵۵$$

$$۲x = ۵۵ - ۵y$$

$$x = \frac{۵۵ - ۵y}{۲}$$

و نظر بآنکه x عدد صحیح شود باید کسر $\frac{۵۵-۵y}{۲}$ نیز عدد صحیح شود پس تقسیم کسر را بقدر امکان مجری میداریم تا چنین شود

$$\frac{۵۵ - ۵y}{۲} = ۲۷ - ۲y + \frac{۱ - y}{۲}$$

و از این قرار $x = \frac{۵۵ - ۵y}{۲} = ۲۷ - ۲y + \frac{۱ - y}{۲}$ (۱)

پس اگر قرار دهیم $\frac{۱ - y}{۲} = t$ (۲)

چنین شود $x = ۲۷ - ۲y + t$ (۳)

اما.

اما از این تساوی $\frac{1-y}{2}=t$

چنین استخراج کنیم $1-y=2t$

(۴) $y=1-2t$

وچون در معادلهٔ (۳) مقدار y را قرار دهیم چنین شود

$$x=27-2(1-2t)+t=27-2+4t+t=25+5t$$

پس دو معادله بدست آمد (۵) $x=25+5t$

(۶) $y=1-2t$

در مسالهٔ سیابنجی t را هرچه توان فرض نمود بشرط آنکه x و y را جواب مثبت دهد اما t نظر بآنکه صحیح و مثبت شود نتوان t را مقادیر مثبت گرفت اما اگر منفی فرض کنیم در معادلهٔ (۵) و (۶) بدل شود باین دو (اما در این دو معادلهٔ تازه پر معلوم است که t را نباید جز مقادیر مثبته چیزی فرض شود)

(۷) $x=25+5\times -t=25-5t$

(۸) $y=1-2\times -t=1+2t$

ونظر بآنکه x مثبت شود باید در معادلهٔ ۷ چنین مقید بود که $25>5t$ یا $\frac{25}{5}>t$ و از این قرار t نباید از ۵ تجاوز کند و چون میتوان t را صفر نیز گرفت مسئله صاحب پنج جواب ذیل است

$x=25-5\times0=25$ $y=1+2\times0=1$

$x=25-5\times1=20$ $y=1+2\times1=3$

$x = 25 - 5 \times 2 = 15$ $\quad$ $y = 1 + 2 \times 2 = 5$

$x = 25 - 5 \times 3 = 10$ $\quad$ $y = 1 + 2 \times 3 = 7$

$x = 25 - 5 \times 4 = 5$ $\quad$ $y = 1 + 2 \times 4 = 9$

تحقیق — ۲۵ پول دو هزاری با یک پول ۵ هزاری میشود ۵۵ قران و هکذا
۲۰ پول دو هزاری و ۳ پنجهزاری میشود ۵۵ و هکذا

۲۷۰ — مسئله ۳ — قصابی چند راس گوسفند خرید بمبلغ ۱۵۲۸ قران و آنها دو صنف بودند میش از قرار راسی ۲۵ قران و بز از قرار ۲۹ قران حال از هر صنف چند راس خریده

عدد میش ها را x فرض کنیم و عدد بزها را y پس این معادله مرتب شود

$$25x + 29y = 1528$$

$$x = \frac{1528 - 29y}{25}$$

پس بقدر امکان عمل قسمت $1528 - 29y$ را بر ۲۵ مجری میداریم

تا چنین شود $\quad x = 61 - y + \frac{3 - 4y}{25}$

و فرض میکنیم $\quad \frac{3 - 4y}{25} = t$

و از آنجا $\quad (1) \quad x = 61 - y + t$

آنا از $\quad \frac{3 - 4y}{25} = t$

چنین استخراج شود

$$3 - 4y = 25t$$
$$-4y = 25t - 3$$
$$4y = 3 - 25t$$
$$y = \frac{3 - 25t}{4}$$

وچون عمل این قسمت را بجا آوریم چنین شود

$$y=\frac{۳-۲۵t}{۴}=-۶t+\frac{۳-t}{۴}$$

وچون فرض کنیم $\frac{۳-t}{۴}=u$

چنین شود $y=-۶t+u \qquad (۲)$

از آن $\frac{۳-t}{۴}=u$

استخراج شود $۳-t=۴u$

$$-t=۴u-۳$$

$$t=۳-۴u$$

وچون مقدار t را در معادلهٔ (۱) و (۲) نقل کنیم چنین شود

$$(۳)\ x=۶۱-y+t=۶۱-y+۳-۴u=۶۴-y-۴u$$

$$(۴)\ y=-۶t+u=-۶(۳-۴u)+u=-۱۸+۲۴u+u=$$

$$۲۵u-۱۸$$

وبالجمله چون این مقدار اخیر y را در معادلهٔ (۳) قرار دهیم چنین شود

$$x=۶۴-y-۴u=۶۴-(۲۵u-۱۸)-۴u=۶۴-۲۵u+$$

$$+۱۸-۴u=۸۲-۲۹u$$

واز روی این دو معادله $x=۸۲-۲۹u$

$$y=۲۵u-۱۸$$

جوابهای x و y بدست آید

ونظ

ونظر بآنکه س مثبت باشد باید ۸۲ > ۲۹z یا ۸۲/۲۹ > z و آنقدر
ع نیز مثبت باشد باید ۱۸ < ۲۵z یا ۱۸/۲۵ < z پس مقدار
z نتواند صحیح باشد جز ۱ و ۲

وازاین قرار مسئلهٔ مذکوره زیاده از دو جواب نپذیرد وبازاء ۱ = z

x = ۸۲ − ۲۹ × ۱ = ۸۲ − ۲۹ = ۵۳

y = ۲۵ × ۱ − ۱۸ = ۲۵ − ۱۸ = ۷

وبازاء z = ۲

x = ۸۲ − ۲۹ × ۲ = ۸۲ − ۵۸ = ۲۴

y = ۲۵ × ۲ − ۱۸ = ۵۰ − ۱۸ = ۳۲

تحقیق — ۵۳ میش ۲۵ قرانی میشود ۵۳ × ۲۵ یعنی ۲۵
قران و ۷ بز ۲۹ قرانی میشود ۷ × ۲۹ = ۲۰۳ پس

۱۳۲۵ + ۲۰۳ = ۱۵۲۸

وقیمت ۲۴ میش ۲۵ قرانی اینست ۲۴ × ۲۵ = ۶۰۰ و
۳۲ بز ۲۹ قرانی چنین ۳۲ × ۲۹ = ۹۲۸ پس

۶۰۰ + ۹۲۸ = ۱۵۲۸

۲۷۱ — مسئلهٔ ۴ — مطلوبست دو عدد که فضلهٔ برابر
اولی بر ۱۳ برابر دوّمی بشود ۵۴

فرض

فرض کنیم x و y این دو عدد را آنوقت

$$8x - 13y = 54$$

$$8x = 54 + 13y$$

$$x = \frac{54 + 13y}{8}$$

و چون قسمت کنیم $54 + 13y$ را بر ۸ چنین شود

$$x = \frac{54 + 13y}{8} = 6 + y + \frac{6 + 5y}{8}$$

و چون قرار دهیم $\frac{6 + 5y}{8} = t$

چنین شود $x = 6 + y + t \quad (1)$

اما از این معادله $\frac{6 + 5y}{8} = t$

چنین نتیجه شود $6 + 5y = 8t$

$$5y = 8t - 6$$

$$y = \frac{8t - 6}{5}$$

و چون قسمت کنیم $8t - 6$ را بر ۵ چنین شود

$$y = t - 1 + \frac{3t - 1}{5}$$

و چون فرض کنیم $\frac{3t - 1}{5} = u$

چنین شود $y = t - 1 + u \quad (2)$

اما از $\frac{3t - 1}{5} = u$

چنین

چنین شود $۳t-۱=۵v$

$$۳t=۵v+۱$$

$$t=\frac{۵v+۱}{۳}$$

یا $t=v+\frac{۲v+۱}{۳}$

و چون فرض کنیم $\frac{۲v+۱}{۳}=u$

چنین شود $t=v+u \qquad (۳)$

و از $\frac{۲v+۱}{۳}=u$

استخراج شود $۲v+۱=۳u$

$$۲v=۳u-۱$$

$$v=\frac{۳u-۱}{۲}=u+\frac{u-۱}{۲}$$

و چون فرض کنیم $\frac{u-۱}{۲}=z$

چنین شود $v=u+z \qquad (۴)$

اما از $\frac{u-۱}{۲}=z$

استنباط شود $u-۱=۲z$

$$u=۲z+۱$$

و چون مقدار u را در معادلات (۳) و (۴) قرار دهیم چنین شود

$$t=v+u=v+۲z+۱ \qquad (۵)$$

$$v=u+z=۲z+۱+z=۳z+۱$$

و چون

و چون این مقدار اخیر u را در دو معادلهٔ (۴) و (۵) قرار دهیم چنین شود

$$(۶) \quad y = t-1+u = t-1+3z+1 = t+3z$$

$$t = u+2z+1 = 3z+1+2z+1 = 5z+2$$

و چون این مقدار t را در دو معادلهٔ (۱) و (۶) قرار دهیم چنین شود

$$(۷) \quad x = 6+y+t = 6+y+5z+2 = 8+y+5z$$

$$y = t+3z = 5z+2+3z = 8z+2$$

و بالجمله چون این مقدار y را در معادلهٔ (۷) قرار دهیم چنین شود

$$x = 8+y+5z = 8+8z+2+5z = 10+13z$$

و از این قرار مقادیر x و y از روی این دو معادله بدست آیند

$$x = 10+13z$$

$$y = 8z+2$$

و ظاهر است که هر مقدار مثبتی که مایهٔ z نسبت دهیم در این دو معادله صدق کند و چون بترتیب فرض کنیم

$$z = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4 \ldots$$

مقادیر x و y چنین شوند

$y = 8\times 0+2 = 2$	$x = 10+13\times 0 = 10$
$y = 8\times 1+2 = 10$	$x = 10+13\times 1 = 23$
$y = 8\times 2+2 = 18$	$x = 10+13\times 2 = 36$
$y = 8\times 3+2 = 26$	$x = 10+13\times 3 = 49$
	$x = \ldots$

پس

پس این مسئله جوابهای بیشمار قبول کند

تحقیق

۸ × ۱۰ − ۱۳ × ۲ = ۵۴

۸ × ۲۳ − ۱۳ × ۱۰ = ۵۴

۸ × ۳۶ − ۱۳ × ۱۸ = ۵۴ وغیره

۲۷۲- تنبیه ۱ - باید ملتفت این نکته بود که مسائل سیاله بسیار اتفاق می افتد که جوابهای محدود دارند (مسئله ۱ و ۲ و امثال آنها) و نیز مسائل سیاله که جوابهای بیشمار قبول میکنند (مثل مسئله چهارم) و این تفاوت را میتوان آسان یافت که از کجاست هر معادله که باین صورت باشد

$$ax + by = c$$

عدد جوابهایش محدود میشود زیرا که x و y چون باید مثبت باشند اتفاق می افتد که جمع دو کمیت ax و by بتواند معادل شود با c

اما اگر معادلهٔ ما باین صورت دیگر بود

$$ax - by = c$$

عدد جوابها بیشمار میشد چرا که تفاضل دو حاصل ضرب تواند در حالات بیشمار برابر شود با c

تنبیه ۲ - چون فعلاً مشغولیم بحل مسائل سیاله که ما را بجوابهای صحیح برسانند خوب است بفهمیم راه شناختن مسئله را که چنین جوابها از او استخراج میشود

شرط آنکه جوابهای مسئله صحاح باشند اینست که بعد از جمیع اختصارات مُعتَبَرهای مجهولات متباین باشند نسبت بهم یکدیگر و نسبت بجملهٔ معلومه

(در حساب گفته ایم که دو عدد یا چند عدد را نسبت بهم یکدیگر متباین و اوّل گوئیم در آن صورت که بجملگی جز واحد چیزی آنهارا عاد نکند مثلا ۱۵ و ۸ و ۱۶ متباین اند چراکه بجز واحد عادِ مشترکی ندارند)

مثلا در این معادله $$۶x + ۸y = ۳۳$$

جوابهای صحیح بدست میآید چراکه بعد از اختصارات چنین میشود

$$۳x + ۴y = ۱۶$$

و اعداد ۳ و ۴ و ۱۶ متباین اند اما معادلهٔ ذیل چنین نیست

$$۱۴x + ۲۱y = ۶۹$$

چراکه ۱۴ و ۲۱ عادِ مشترک دارند ۷ و آن عاد نکند ۶۹ را پس چنین نویسیم

$$۲x + ۳y = \frac{۶۹}{۷}$$

عضو اوّل این معادله چون جمع دو عدد صحیح است نتواند برابر شود با مقداری کسری $\frac{۶۹}{۷}$

تنبیه ۳ — جوابهای مسائل سیّاله همواره منجر میشود بسلسله های حسابی و در آن حالت که یک معادله داشته باشیم و دو مجهول معتبر هر مجهول

قدر

قدر نسبت سلسلهٔ مقادیر نظایر مجهول دیگر است و عکس آن
و این نکته را از روی جوابهای مسائل سابق توان دریافت مثلاً در مسئله
۴ مقادیر ب چنین بود ۵ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۰ و ۲۵ و قدر نسبت
این سلسله ۵ هست یعنی معتبر ج و مقادیر ج که نظایر ب باشند
اینست ۱ و ۳ و ۵ و ۷ و ۹ قدر نسبت این سلسله ۲ هست یعنی
معتبر ب

تنبیه ۴ – از روی همین چند مسئله که حل نمودیم دستور العمل تعیین جواب
مسائل سیاله معلوم شد از این قرار باید در معادلهٔ مفروضه اگر
مخارجی باشد رفع نمود و عاملهای مشترکی اگر باشد خارج
نمود و بعد در طلب جواب صحیح هر مجهولی بر آمد باینکه تقسیمات
متوالیهٔ چند بعمل آوریم و هر جا لازم شود مجهول سیالهٔ تازه
درج کنیم

و چون سیالهٔ مجهول را مقدار صحیح بی کسری بدست آوریم
معادله حل شده و آنوقت همین بس که بقدر امکان سیالات
میانجی را خارج کنیم و از این نکته نباید غفلت نمود که در هر معادله
همواره باید مقدار مجهولی را طلب نمود که معتبرش کوچکتر
باشد و چند مسئلهٔ دیگر با نتایجها حل میکنیم تا دلیل و دستور کافی
باشد

باشد مرتشکردان را در جمیع حالات

۲۷۳- مسئله ۵- شخصی سه قسم کفش خرید زوجی سه قران و زوجی ۵ قران و زوجی ۷ قران مطلوبست از هر قسم چند زوج خرید ذکر کرده بنابر آنکه بهمه جهة ۱۲۰ قران به بهای آنها داده باشد

فرض میکنیم x و y و z عدد آن سه قسم باشد پس این معادله ترتیب شود

$$3x + 5y + 7z = 120$$

$$x = \frac{120 - 5y - 7z}{3} = 40 - y - 2z + \frac{-2y - z}{3}$$

وچون $+\dfrac{-2y - z}{3} = -\dfrac{2y + z}{3}$

و آنوقت $x = 40 - y - 2z - \dfrac{2y + z}{3}$

وچون فرض کنیم $\dfrac{2y + z}{3} = t$

چنین میشود $x = 40 - y - 2z - t$

اما از $\dfrac{2y + z}{3} = t$

چنین نتیجه شود $2y + z = 3t$

$$z = 3t - 2y$$

وچون این مقدار z را در مقدار x قرار دهیم چنین شود

$$x = 40 - y - 2(3t - 2y) - t = 40 - y - 6t + 4y - t$$
$$= 40 + 3y - 7t$$

پس

پس از ورود این دو معادله

$$(1) \quad x = 40 + 3y - 7t$$

$$(2) \quad z = 3t - 2y$$

مقادیر مجهولات استخراج شود

و چون سیالهٔ y باید مثبت باشد فرض میکنیم $y = 1$ آنوقت دو معادلهٔ (۱)

و (۲) چنین شوند $x = 40 + 3 - 7t = 43 - 7t$

$$z = 3t - 2$$

و نظر بانکه x و z مثبت شوند باید از طرفی $43 > 7t$ یا $\frac{43}{7} > t$

و بلحاظی $2 < 3t$ یا $\frac{2}{3} < t$

و چون سیالهٔ t باید صحیح باشد و کوچکتر از $\frac{43}{7}$ و بزرگتر از $\frac{2}{3}$ نتواند قبول کند جز این چند مقدار را ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶

و از این بفرض $y = 1$ و t بترتیب برابر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ قرار

شش جواب مسلسل ذیل منتیجه میشود

$$y = 1, 1, 1, 1, 1, 1$$

$$x = 36, 29, 12, 15, 8, 1$$

$$z = 1, 4, 7, 10, 13, 16$$

و حال اگر فرض کنیم $y = 2$ و این مقدار را در دو معادلهٔ (۱) و

(۲) قرار دهیم چنین شود

$$x = ۴۰ + ۳ \times ۲ - ۷t = ۴۶ - ۷t$$

$$y = ۳t - ۲ \times ۲ = ۳t - ۴$$

دراین حالت نظر بآنکه x و y مثبت باشند باید چنین شرطی را رعایت نمود که

$t < \frac{۴۶}{۷}$ یا $۷t < ۴۶$

$t > \frac{۴}{۳}$ یا $۳t > ۴$

وچون t واجب شد که مابین $\frac{۴۶}{۷}$ و $\frac{۴}{۳}$ باشد باید آنرا بترتیب فرض نمود ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ وآنوقت این رشتهٔ پنج جوابی بدست آید

$z =$	۲ ،	۲ ،	۲ ،	۲ ،	۲
$x =$	۳۲ ،	۲۵ ،	۱۸ ،	۱۱ ،	۴
$y =$	۲ ،	۵ ،	۸ ،	۱۱ ،	۱۴

وما اتمام این مسئله را بعهدهٔ شاگرد میگذاریم که بترتیب فرض کند ۳ = z و ۴ = z و .... وسایر رشته های جواب را بدست آورد اما همین قدر گوئیم که بزرگتر مقداری که بتوان به z نسبت داد ۲۲ است چراکه چون آنرا در معادلهٔ (۱) و (۲) قرار دهیم چنین شود

$$x = ۴۰ + ۳ \times ۲۲ - ۷t = ۱۰۶ - ۷t$$

$$y = ۳t - ۲ \times ۲۲ = ۳t - ۴۴$$

ونظر بآنکه x و y مثبت شوند باید

$t < \frac{۱۰۶}{۷}$ و یا $۷t < ۱۰۶$

$t > \frac{۴۴}{۳}$ یا $۳t > ۴۴$

و در این حالت هم چون باید کوچکتر شود از ۱۶ و بزرگتر از ۱۴ هیچ عددی
نشود جز ۱۵ و بنابراین یک فرض یک رشته جواب در آید.

$$y = 22$$
$$x = 1$$
$$z = 1$$

و اگر فرض کنیم $y = 23$

چنین شود $x = 40 + 3 \times 23 - 7t = 109 - 7t$

$$z = 3t - 2 \times 23 = 3t - 46$$

و نظر بآنکه باید x و z مثبت شوند باید چنین رعایت کرد

$t < \frac{109}{7}$ یا $7t < 109$

$t > \frac{46}{3}$ یا $3t > 46$

و از این قرار t باید بزرگتر شود از ۱۵ و کوچکتر از ۱۶ و بنابراین محال است

تحقیق — هر کدام از جوابها را میتوان اختیار نمود مثلا در رشتهٔ اول جواب
اول $5 = 5y$ و $3x = 36 \times 3 = 108$ و $7z = 7$ پس
$5 + 108 + 7 = 120$ و هکذا

۲۷۴ — مسئله ۶ — شخصی سه قسم کتاب خرید اولی جلدی ۲
قران دومی ۴ قران و سومی ۷ قران و بهر جهة ۲۳ قران مایه
گذاشت پس از هر قسمی چند جلد بوده

فرض

فرض میکنیم x و y و z عدد مجلدات ۲ قرانی و ۴ قرانی و ۷ قرانی

باشد و این معادله مرتب شود $2x+4y+7z=73$

مقدار x را بیرون آوریم

$$x=\frac{73-4y-7z}{2}=36-2y-3z+\frac{1-z}{2}$$

فرض کنیم $\frac{1-z}{2}=t$

چنین شود $x=36-2y-3z+t$

اما از $\frac{1-z}{2}=t$

استنباط شود

$$1-z=2t$$
$$-1+z=-2t$$
$$z=1-2t$$

و چون این مقدار z را در تغییر x قرار دهیم چنین شود

$$x=36-2y-3(1-2t)+t$$

$$x=36-2y+3+6t+t=33-2y+7t$$

و از این قرار باید از این دو معادله

$$(1)\quad x=33-2y+7t$$

$$(2)\quad z=1-2t$$

مقادیر مختلفه مجهولات مسئله را استخراج نمود

و چون مقادیر x و z و y باید همواره صحیح و مثبت باشند فرض میکنیم

١ = ط و آنرا در معادلهٔ (١) قرار میدهیم میشود

x = ٣٣ − ٢ × ١ + ٧ط

x = ٣١ + ٧ط

و چون مسئاله ط میانجی است میتوان آنرا هر چیزی فرض نمود که x و y مثبت نمایند اما از معادلهٔ (٢) y = ١ − ٢ط

چنین برمی آید که ط باید صفر باشد یا منفی تا آنکه y مثبت شود

پس اگر فرض کنیم ٠ = ط چنین شود

x = ٣١ + ٧ × ٠ = ٣١

y = ١ − ٢ × ٠ = ١

و چون ط را منفی بگیریم چنین شود

x = ٣١ + ٧ × −ط = ٣١ − ٧ط

y = ١ − ٢ × −ط = ١ + ٢ط

و بنابراین فرض نظر باینکه x مثبت شود باید

ط < ٣١/٧ یا ٧ط < ٣١

و از این قرار در این معادله x = ٣١ − ٧ط

y = ١ + ٢ط

چون ط باید مثبت باشد میتوان بترتیب فرض شود

$$t = 0, 1, 2, 3, 4$$

ونظایر این مقادیر ت رشتهٔ ذیل است (بنابرانکه $y = 1$)

$$y = 1, 1, 1, 1, 1$$
$$x = 31, 24, 17, 10, 3$$
$$z = 1, 3, 5, 7, 9$$

حال فرض کنیم $y = 2$

و معادلات (۱) و (۲) چنین شوند

$$x = 33 - 2 \times 2 + 7t = 29 + 7t$$

$$z = 1 - 2t$$

و نظر بمقدار منفی صرف ت را بتوان منفیه فرض نمود پس آید معادله باین شکل در آیند

$$x = 29 + 7 \times -t = 29 - 7t$$

$$z = 1 - 2 \times -t = 1 + 2t$$

و نظر بانکه x مثبت شود باید رعایت نمود که $29 > 7t$ یا $t < \frac{29}{7}$

پس چنین نویسیم $t = 0,\ t = 1,\ t = 2,\ t = 3,\ t = 4$

و نظایر این مقادیر ت رشتهٔ ثانی ذیل است

$$y = 2, 2, 2, 2, 2$$
$$x = 29, 22, 15, 8, 1$$
$$z = 1, 3, 5, 7, 9$$

و زحمت یافتن سایر رشته های جواب را بعهده شاگرد میگذاریم

اما حد توقف را نشان میدهیم دانستیم که بزرگتر مقدار z عدد ۴ است حال میخواهیم بدانیم y تا به حد میرود چون در دو معادله (۱) و (۲) قرار دهیم $z = 1$ چنین شود

$$x = ۳۳ - ۲y$$

$$z = ۱$$

و شرط آنکه x مثبت شود اینست که

$$۲y < ۳۳ \quad \text{یا} \quad y < \frac{۳۳}{۲}$$

و از این قرار بزرگتر مقدار ممکن y عدد ۱۶ است و موافق این قرار جواب مفرد چنین شود

$$x = ۳۳ - ۲ \times ۱۶ = ۱$$
$$y = ۱۶$$
$$z = ۱$$

تحقیق — یک جواب از رشتهٔ اوّل بگیریم و یکی از دوم

بازاء ۳۱ جلد دو قرانی و یک جلد ۴ قرانی و ۱ جلد ۷ قرانی میشود

$$۳۱ \times ۲ + ۴ \times ۱ + ۷ \times ۱ = ۷۳$$

بازاء ۲۹ جلد ۲ قرانی و ۱ جلد ۷ قرانی و ۲ جلد ۴ قرانی میشود

$$۲۹ \times ۲ + ۷ \times ۱ + ۴ \times ۲ = ۷۳$$

تنبیه — در آن حالت که از یک مسئله بسته باله چند معادله منتج شود باید بدستوری که سابق گفته ایم بتدریج یک معادله و یک مجهول را حذف و القا نمائیم تا برسیم بمعادلهٔ اخیر و آنوقت بمانند مسائل مذکوره آنرا حل کنیم

۲۷۵ - مسئله ۷ - شخصی بمبلغ یک صد قران یک صد پیمانه شیره خرید از سه قسم پیمانه ۶ ر قران و پیمانه ۱ ر۱ قران و پیمانه ۲ قران مطلوبست عدد پیمانه های هر قسمی

چون عدد پیمانه های هر کدام را x و y و z فرض کنیم این دو معادله بدست آید

$$(1) \quad x + y + z = 100$$

$$0.6x + 1.1y + 2z = 100$$

$$(2) \quad 6x + 11y + 20z = 1000$$

جمله های معادله (۱) را در ۶ ضرب کنیم و از معادله (۲) تفریق کنیم تا تدبیر شود و چنین آید

$$6x + 11y + 20z - 6x - 6y - 6z = 1000 - 600$$

$$5y + 14z = 400$$

$$y = \frac{400 - 14z}{5} = 80 - 2z + \frac{-4z}{5} = 80 - 2z - \frac{4z}{5}$$

و چون قرار دهیم $\frac{4z}{5} = t$

چنین شود $y = 80 - 2z - t$

اما از $\frac{4z}{5} = t$

نتیجه شود $4z = 5t$

$$z = \frac{5t}{4} = t + \frac{t}{4}$$

قرار

قرار دهیم $\frac{t}{4} = x$

حاصل شود $z = t + x$

و از تساوی $\frac{t}{4} = x$

حاصل شود $t = 4x$

و چون آنرا در مقادیر y و z گذاریم چنین شود

$$y = 80 - 2z - 4x$$

$$z = 4x + x = 5x$$

و بالجمله مقدار z را در مقدار اخیر y میگذاریم چنین شود

$$y = 80 - 2 \times 5x - 4x = 80 - 14x$$

و از این قرار بدو معادلهٔ ذیل

$$y = 80 - 14x$$

$$z = 5x$$

مقادیر y و z استخراج میشود و چون آنها را در معادله (۱) قرار دهیم مقادیر x بدست میاید و شرط مثبت شدن z مثبت بودن x است و اما مقادیری را که بتوان بآن نسبت داد باید بمبداء این معادلهٔ ذیل یافت

$$z = 80 - 14x$$

چراکه اگر باید y نیز مثبت باشد باید این شرط را رعایت نمود

$$80 > 14x \quad \text{یا} \quad x < \frac{80}{14}$$

پس

پس بترتیب فرض کنیم

$u = 1, 2, 3, 4, 5$ وازاین قرار مسئلهٔ ما زیاده بر پنج جواب قبول نکند

هرگاه فرض کنیم $u = 1$

$$y = 80 - 14u = 80 - 14 = 66$$

وچون این مقادیر را در معادلهٔ (۱) نقل کنیم چنین شود

$$x + 66 + 5 = 100$$

$$x = 100 - 71 = 29$$

حال فرض میکنیم $u = 2$

وچنین شود $y = 80 - 14u = 80 - 28 = 52$

$$z = 5u = 10$$

وچون این مقادیر را در معادلهٔ (۱) گذاریم چنین شود

$$x + 52 + 10 = 100$$

$$x = 100 - 62 = 38$$

ومقادیر سایر مجهولات زود بدست آید چونکه ذکر شد ۲۷۲ نمبر ۳ که از ترکیب آنها سلسله های حسابی تشکیل شود وچون قدر نسبت آنها در دست است آن مقادیر چنین شوند

$$x = 29,\ 38,\ 47,\ 56,\ 65$$

۱۰ ، ۲۴ ، ۳۸ ، ۵۲ ، ۶۶ = ح

۲۵ ، ۲۰ ، ۱۵ ، ۱۰ ، ۵ = ح

وتحقیق همهٔ این جوابها سهل است

مسائل حل کردنی

۱۵۴- مبلغ ۱۰۲ قران قرض داریم میخواهیم از پولهای یک قرانی و دو هزاری و پنجهزاری ادا کنیم بچند وجه ممکن است

۱۵۵- شخصی ۱۰۰ قطعه شکار خرید بمبلغ ۱۰۰ قران خرگوش از قرار قطعه ۵ قران و بلدرچین از قرار ۴۰ر۰ و چکاوک از قرار ۵ر۰ قران و حال مطلوبست عدد هر کدام

۱۵۶- شخصی را پرسیدند چند عدد مرغانه در سبد داری گفت زیاده از ۱۰۰ است و کمتر از دویست و چون ۷ هفت بشمارم ۲ مرغانه باقی میماند و چون یازده یازده بشمارم سه عدد باقی میماند پس چند عدد باشد

۱۵۷- چند قسم گندم داریم چارکی ۵ر۰ قران و ۶۰ر۰ قران و ۲ر۰ قران و ۲۵ر۰ قران و میخواهیم ۶۰۰ چارک از آنها ترکیب کنیم که چارکی ۵۵ر۰ قران بیارزد پس از هر قسم چند چارک بگیریم

۱۵۸- سه شمش نقره داریم بعیار ۷۵۰ر۰ و ۸۸۰ر۰ و ۹۹۰ر۰ پس از هر کدام چقدر بگیریم تا شمشی ترکیب شود بعیار شرعی ۹۰۰ر۰ و بوزن ۳۵ من تبریز

فصل

فصل دوم

* جوابهائیکه از جبر و مقابله میشود

۲۷۶- بسا اتفاق افتد که صورت مسئله خوب دانشود پس یک شمار الجوابها محال یا غیر آن دانوقت از روی جوابهای جبری که استخراج شوند در جمیع حالات کیفیات مسئله بروز میکند

۲۷۷- مسئله ۱- شخصی امروز ۵۰ ساله است و دیگری ۲۰ ساله میخواهیم چند سال دیگر سن شخص اول سه برابر سن دومی خواهد شد

از روی معلومات مسئله ظاهر است که زمان مطلوب گذشته است و از روی جبر و مقابله این نکته ظاهر میشود

فرض میکنیم x عدد سنین مطلوب باشد آنوقت

$$50 + x = 3(20 + x)$$

$$50 + x = 60 + 3x$$

$$x = 10 + 3x$$

$$2x = -10$$

$$x = -5$$

و چون علامت + عبارت از سنین آینده است در مسئله ۵

علامت

ملاحظت — جواب مسئله بضمین ماضی می‌شود و از این قرار ۵ سال گذشته
از آن وقت که سن اولی سه برابر دومی بوده چه آن وقت صاحب این سن بود

$$۵۰ - ۵ = ۴۵$$

و دومی آن وقت داشته است $۲۰ - ۵ = ۱۵$

و عدد ۴۵ سه برابر ۱۵ است

۲۷۸ — مسئله — شخصی صاحب ۶۸ سال سن است دیگری ۱۷ سال مطلوب است چند سال دیگر سن اولی می‌شود چهار برابر سن دومی

و آنچه ما برای بعد می‌طلبیم الآن واقع است و جبر و مقابله مؤید اوست مدت مطلوب را x فرض کنیم پس شخص اول آن وقت دارای این قدر سن است

$$۶۸ + x$$

و شخص دوم $۱۷ + x$

و بنابراین این معادله تشکیل شود $۶۸ + x = ۴\,(۱۷ + x)$

$$۶۸ + x = ۶۸ + ۴x$$

$$۴x = x$$

و نظر بآنکه $x = ۴x$ باشد باید x صفر شود و آن وقت که $۰ = x$ مطابق شود با مسئله

۲۷۹- مسئله ۳ - دو نفر چاپار از یک نقطه شروع بحرکت نمودند و هر یک در هر ساعت ۱۰ میل راه میرود در آنوقت که دومی شروع بحرکت نمود اولی ۱۵ میل را رفته بود حال مطلوبست که در چه فاصله از مبدأ دومی باولی میرسد

موافق معلومات مسئله ظاهرست که دومی باولی نخواهد رسید و از روی جواب جبری همین واقع میشود

فرض میکنیم x نام راهی باشد که دومی طی میکند و چون در هر ساعت ۱۰ میل میرود عدد ساعات طی مسافت x برابر است با عدهٔ کنج بیش ۱۰ در x یعنی $\frac{x}{10}$ و در وقتی که دومی مسافت x طی میکند مسافتی که اولی طی کند x است منهای آنچه پیموده بود قبل از شروع دومی بحرکت یعنی ۱۵ - x اما چون در هر ساعت ۱۰ میل راه میرود عدد ساعات سیر او برابر است با عدهٔ کنج بیش ۱۰ در ۱۵ - x یعنی با $\frac{x-15}{10}$ و چون دو عدد ساعات برابر است این معادله تشکیل میشود (۹۶ مسئله ۴)

$$\frac{x}{10} = \frac{x-15}{10}$$

$$10x = 10x - 150$$

$$-10x = -10x + 150$$

$$10x - 10x = 150$$

$$x(10-10) = 150$$

$$x = \frac{150}{10-10} = \frac{150}{0}$$

و این فقره معلوم است که مقسوم علیه هر قدر کوچکتر باشد خارج قسمت بزرگتر میشود بنا بر این اگر مقسوم علیه بغایت کوچک باشد خارج قسمت بی اندازه بزرگ میشود و مثلا چنین $۱۵۰ = \frac{۱۵۰}{۱}$ و $۱۵۰۰ = \frac{۱۵۰}{۰٫۱}$ و $\frac{۱۵۰}{۰٫۰۱} = ۱۵۰۰۰$ و هکذا و عدد مثبت هر چند کوچکتر باشد باز بزرگتر است از صفر پس $\frac{۱۵۰}{۰}$ خارج قسمتش بینهایت بزرگ میشود و این نکته را چنین ادا کنند $\frac{۱۵۰}{۰} = \infty$ (از روی این مثال چنین معلوم میشود که در جمیع حالات خارجِ قسمتِ عددی بر صفر بی اندازه بزرگ است)

پس چاپار دوم اولی را در فاصله‌ٔ بی نهایه درک میکند یا هرگز باو نرسد و این شکل $\frac{۱۵۰}{۰}$ یا هر شکلی مشابه آن را بطور کلی چنین نویسند $\frac{m}{0}$ و از این قرار $\frac{m}{0}$ علامت بی نهایه است یا استحاله

۲۸۵ — مسئله ۶ — حالا همان فرضهای مسئله سابق را اینجا تکرار میکنیم جز آنکه فاصله ۱۵ مابین دو چاپار را d فرض کنیم آنوقت

$$\frac{x}{10} = \frac{x-d}{10}$$

$$10x = 10x - 10d$$

$$-10x = -10x + 10d$$

$$10x - 10x = 10d$$

$$x(10-10) = 10d$$

$$x = \frac{10d}{10-10} = \frac{10d}{0}$$

و چون مقدار d غیر معین است میتوان فرض نمود $d = ۰$ آنوقت

$$x = \frac{10d}{10-10} = \frac{10 \times 0}{0} = \frac{0}{0}$$

در شکل $\frac{0}{0}$ چون مقسوم و مقسوم علیه هر دو معدوم اند خارج قسمت هر چه باشد ممکن است زیرا که هر عددی ضرب در صفر حاصلش صفر میشود و مقدار x چون غیر معتین شد هر عددی تواند شد و همان جواب مسئله است و فاصله ما بین دو چاپار چون معدوم شد و سرعتشان هم یکی است همیشه با هم هستند و $\frac{0}{0}$ علامت غیر معتینی و سیالکی است

۲۸۱ - مسئله ۵ - در همان مسئله فرض میکنیم فاصله ما بین دو چاپار d باشد و دومی در هر ساعت ۱۲ میل سیر کند در حالی که اولی ۱۰ میل راه رفته باشد این فرض چنین نتیجه میدهد

$$\frac{x}{12} = \frac{x-d}{10}$$

$$10x = 12x - 12d$$

$$-10x = -12x + 12d$$

$$12x - 10x = 12d$$

$$2x = 12d$$

$$x = \frac{12d}{2}$$

و چون فرض کنیم $0 = d$ چنین شود

$$x = \frac{12d}{2} = \frac{12 \times 0}{2} = \frac{0}{2}$$

فاصله ما بین دو چاپار صفر شود $(d = 0)$ اگر در آن معنی دومی رسیده باشد

باولی

باولی اما چون نند زمیرود اورا میگذارد و باو همراه مثبت دو دستور $\frac{0}{2}$ چنین مینماید که جا بارودمی با اولی است چرا که خارج قسمت ۰ بر ۲ صفر است و علامت $\frac{0}{2}$ که اغلب باین شکل $\frac{0}{0}$ نموده شود عبارت است از مقدار معدومی یا باطل و غیر موجهی

فصل سیم *

در تشکیل قوای مختلفه دو جمله $a+b$ و استخراج ضلع مرتفعی (جملتین نوشتن عبارت است از دستوریکه بتفصیل بن شخص مهندس انگلیسی بوده (۱۰۵۲–۱۱۴۰ هجری) برای نوشتن مرتوت جملتینی بی تأمل)

۲۸۲ — $(a+b)^2=(a+b)(a+b)=a^2+2ab+b^2$

$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$

بانکه دور تر شویم ظاهر است که میتوان آسان قاعده بدست داد در نوشتن مرتوت جملتین $a+b$ بی وساطت عمل

دستور جملتین $a+b$ را بهر درجه ترقی دهیم شامل شود اولا جمله های چند را که عددش یکواحد بیشتر از درجه قوت باشد ثانیا حرف a در جمیع جمله ها یافت شود بغیر از جمله اخیر و حرف b در جمیع جمله ها بغیر از جمله اول ثالثا دو جمله اول و اخر بدرجه خود

قوت

قوت مطلوب اند آنرا بعد قوای س بترتیب روی بتناقص نهند بتفاضل
واحد و قوای ک روی بتزاید نهند بتفاوت واحد آنگاه خامساً معبّر
هر جمله با این قسم حاصل شود که در جملهٔ ما قبل او ضرب کنیم درجهٔ س را
در معبر و قسمت کنیم حاصل را بر عدد مرتبهٔ جملهٔ مطلوب الا جملهٔ اول
و آخر را معبری نیست (رجوع کنید بفصل یا بعد و مثلث حسابی پاسکال را
در فصل پنجم)

و چون بدستور مذکور پیش روید برای قوت هفتم ک + س یعنی $(\text{ک}+\text{س})^{7}$
بترتیب این اشکال حاصل شود بدستور فوق

(اولا وثانیا) $\text{ک}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{س}$

(ثالثا) $\text{ک}^{7}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{ک}\,\text{س}+\text{س}^{7}$

(رابعا) $\text{ک}^{7}+\text{ک}^{6}\text{س}+\text{ک}^{5}\text{س}^{2}+\text{ک}^{4}\text{س}^{3}+\text{ک}^{3}\text{س}^{4}+\text{ک}^{2}\text{س}^{5}+\text{ک}\,\text{س}^{6}+\text{س}^{7}$

(خامسا) $\text{ک}^{7}+7\text{ک}^{6}\text{س}+21\text{ک}^{5}\text{س}^{2}+35\text{ک}^{4}\text{س}^{3}+35\text{ک}^{3}\text{س}^{4}+21\text{ک}^{2}\text{س}^{5}+7\text{ک}\,\text{س}^{6}+\text{س}^{7}$

این نکته را خوب است ملتفت شوید که هر دو جملهٔ متساوی البعد از طرفین صاحب
یک معبّرند و بنابراین همینقدر کافی است که معبرهای نیمی از جمله‌ها را بدست آوریم

و در استخراج ضلع هرگاه تعمیم بکار بریم استمداد جوئیم قوای مختلفه ک + س توانند
ما را در استخراج هر ضلع مدد کنند

مثلاً فرض میکنیم که منظور استخراج کعب عددی باشد

ابتدا

ابتدا ملاحظه میکنیم شکل ترکیب مکعب عددیرا که مؤلف باشد از عشرات و آحاد هرگاه عشرات آنعدد را س فرض کنیم و آحادش را ی مکعبش میشود

$$(س + ی)^۳ = س^۳ + ۳س^۲ی + ۳سی^۲ + ی^۳$$

و از این قرار مکعب عددی که مشتمل باشد بر عشرات و آحاد مرکب شود از مکعب عشرات $س^۳$ و از سه مرتبه مربع عشرات در آحاد $۳س^۲ی$ و از سه مرتبه عشرات در مربع آحاد $۳سی^۲$ و از مکعب آحاد $ی^۳$

و چون کعب ۱۰۰۰ عدد ۱۰ است هر عدد بزرگتر از هزار کعب بزرگتر از ۱۰ است و بنابر این مرکب شود از عشرات و آحاد و چون این مطلب معلوم شد

مطلوب استخراج کعب این عدد است ۵۹۲۷۰۴

قرار میدهیم $۵۹۲۷۰۴ = س^۳ + ۳س^۲ی + ۳سی^۲ + ی^۳$

مکعب عشرات ضلع عدد صحیحی است از مرتبه الوف و باشت نشود بجز در الوف عدد مفروض پس آن ارقام مادون هزار را به نقطه جدا کنیم و محاسبات را بطوریکه معمول است اینجا ترتیب میدهیم

۵۹۲ ۷۰۴ ۸۴	$س = ۸ ،\ س^۳ = ۸×۸×۸ = ۵۱۲$
۵۱۲	$۳س^۲ی = ۸۰۷$
۸۰ ۷۰۴	$ی = \frac{۸۰۷}{۳س^۲} = \frac{۸۰۷}{۱۹۲} = ۴$
۸۰۷۰۴	$۳س^۲ی = ۳×۸۰×۸۰×۴ = ۷۶۸۰۰$
	$۳سی^۲ = ۳×۸۰×۴×۴ = ۳۸۴۰$
	$ی^۳ = ۴×۴×۴ = ۶۴$
	$۳س^۲ی + ۳سی^۲ + ی^۳ = ۸۰۷۰۴$

و از این

و از این قرار عدد ۵۹۲ شامل مکعب عشرات ضلع شود یا $\text{س}^{۳}$ و چون استخراج کنیم کعب بزرگترین مکعب را که گنجیده باشد در ۵۹۲ حاصل شود عشرات ضلع یعنی س و چون بزرگتر مکعب گنجیده در ۵۹۲ است ۵۱۲ که ضلعش میشود ۸ پس $\text{س} = ۸$ و $\text{س}^{۳} = ۸ \times ۸ \times ۸ = ۵۱۲$ و چون از عدد مفروض مکعب عشرات را موضوع نمودیم باقی ماند ۸۰۷۰۴ که شامل سه جزو دیگر است از مکعب ضلع باین شکل

$$۸۰۷۰۴ = ۳\text{س}^{۲}\text{ط} + ۳\text{س}\,\text{ط}^{۲} + \text{ط}^{۳}$$

اما سه برابر مربع عشرات در آحاد یعنی $۳\text{س}^{۲}\text{ط}$ عدد صحیحی است از آن ریافت نشود جز در آن ۸۰۷۰۴ و بنابراین صحیحش در ۸۰۷ است و چون بنویسیم $۳\text{س}^{۲}\text{ط} = ۸۰۷$ آنوقت بدست آید یعنی $\text{ط} = \frac{۸۰۷}{۳\text{س}^{۲}}$ و چون بدست آمد $\text{س} = ۸$ سهل باشد نسبت $۳\text{س}^{۲}$ باین صورت $۳\text{س}^{۲} = ۳ \times ۸ \times ۸ = ۱۹۲$ پس $\text{ط} = \frac{۸۰۷}{۱۹۲} = ۴$ و چون ما قرار داده بودیم $۸۰۷۰۴ = ۳\text{س}^{۲}\text{ط} + ۳\text{س}\,\text{ط}^{۲} + \text{ط}^{۳}$ حالا باید این سه حاصل را جمع کنیم $۳\text{س}^{۲}\text{ط}$ و $۳\text{س}\,\text{ط}^{۲}$ و $\text{ط}^{۳}$ و ببینیم آیا این حاصل جمع تواند تفریق شد از ۸۰۷۰۴ باینطور

$$۳\text{س}^{۲}\text{ط} = ۳ \times ۸۰ \times ۸۰ \times ۴ = ۷۶۸۰۰ \quad \text{و} \quad ۳\text{س}\,\text{ط}^{۲} = ۳ \times ۸۰ \times ۱۶ = ۳۸۴۰$$

و $\text{ط}^{۳} = ۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$ پس.

۳ ک^{2} س + ۳ ک س^{2} + س^{3} = ۷۶۸۰۰ + ۳۸۴۰ + ۶۴ = ۸۰۷۰۴

و چون مجموع این سه عدد درست برابر است با ۸۰۷۰۴ معلوم میشود که کعب عدد ۵۹۲۷۰۴ درست ۸۴ است

تنبیه ۱ – در آن حالت که عدد مفروض بیش از ۶ رقم دارا باشد باید سه رقم از بمینش جدا نموده در جزو باقی سمت چپ دلیل شبیه سابق اقامه کنیم و بعبارت اخری عددی تواند ضلعش دارای ۲ رقم و سه رقم و ..... عشرات شود

تنبیه ۲ – چون در کثیر الجمله ک^{3} + ۳ک^{2} س + ۳ک س^{2} + س^{3} فرض کنیم ۱ = ک چنین شود (۱ + س)^{3} = ۱ + ۳س + ۳س^{2} + س^{3} و چون مکعب س میشود ۳س چنین نتیجه میشود که تفاضل دو مکعب دو عدد متوالی برابر است با سه برابر مربع عدد اول و سه برابر خود آن عدد بعلاوه ۱

تنبیه ۳ – آنچه را که قصد داشتیم در این خصوص بسط دهیم محض احتراز از تطویل کلام فرو گذاشتیم امّا آنچه ذکر کردیم ظاهرا کافی باشد شاگردان را در فهم مقاصد ما

فصل چهارم

در علم ترکیب بندیها

۲۸۳ – هرگاه چند چیز داشته باشیم و بخواهیم باقسام مختلفه مکان هر کدام از آنرا تغییر دهیم نسبت

نسبت بسایر تغییر دهیم چنین عمل را تبدیل بندی گوییم

۲۸۴ — ترتیب بندها ... هرگاه آن چیزها را یک یک، دو دو، سه سه ... منظور آوریم و در هر دسته اقسام ممکنه تغییر و تبدیل را بعمل آوریم چنین عمل را ترتیب بندی گوییم

۲۸۵ — اما ترکیب بندیها — آن ترتیب بندیها که اقلا یک چیز اختلاف داشته باشند ترکیب بندی است

من باب توضیح مطلب و دفع پراکندگی خیال بر می‌آییم در طلب تبدیل بندیها و ترتیب بندها و ترکیب بندهائی که ممکن است در حروف a و b و c و d و e و f و g و .... جاری نمود

۲۸۶ — در محاسبهٔ تبدیل بندیهای n حروف — از دو حرف a و b دو تبدیل ممکن است صورت بندد ab و ba و از سه حرف a و b و c شش تبدیل چرا که حرف c در دستهٔ ab سه موضع مختلف تواند گرفت

a b c
a c b
c a b

و در دستهٔ ba نیز سه موضع

b a c
b c a
c b a

و از این قرار حاصل ضرب ۱ و ۲ و ۳ عدد تبدیلاتی است که بتوان با سه
حرف نمود و در تفصیل تبدیلات چهار حرف a و b و c و d حرف d را
جای سه میم در جمیع مواضعی که گنجایش داشته باشد در دسته های مذکوره
از این قرار از c b a چهار تبدیل ذیل بعمل میآید

a b c d
a b d c
a d b c
d a b c

و از c b a نیز چهار تبدیل دیگر حاصل میشود

a c b d
a c d b
a d c b
d a c b

و همچنین در سایر دسته ها

و چون شش دسته داریم و هر کدام را چهار تبدیل است عدهٔ صور تبدیلات چهار
حرفی میشود ۲۴ پس از روی حاصل ضرب ۱ و ۲ و ۳ و ۴ بدست آید
عدد تبدیلاتی که در چهار حرف باقسام مختلفه صورت بندد
و بهمین دستور معلوم میشود که عدد تبدیلات پنج حرفی اینست

۱ . ۲ . ۳ . ۴ . ۵ = ۱۲۰

و عدد تبدیلات شش حرفی اینست

۱.۲.۳.۴.۵.۶ = ۷۲۰ و هکذا

و بنابراین عدد تبدیلاتی که بتوان در m حرف نمود مساوی هست با حاصل ضرب جمیع اعداد طبیعی تا m که جزو حساب باشد یعنی با این حاصل ضرب

۱.۲.۳.۴ ۵.۶.۷.۸ ...... m

که نماینده عدد تبدیلات m حرف هست باقسام مختلف

و بنابراین حساب تبدیلات چنین اتفاق افتد که ۵ نفر مهمان بتوانند ۱۲۰ نوبت مختلف دور سفره نشینند و هر نوبت وضع و ترتیبی داشته باشند غیر از نوبتهای سابق و اگر شش نفر باشند به ۷۲۰ وضع مختلف توانند نشست و هکذا

۲۸۷- در محاسبه ترتیب بندیهای n حرفی بر n حرفی در m حروف هرگاه ما m حرف اختیار کنیم در a و b و c و d و e و f .... و آنها یک بیک بگیریم بهمه جهة میشود m ترتیب و اگر در جلو a ترتیب سایر حروف را بنویسیم حاصل میشود ba و ca و da و ea و fa ... عدد ترتیبات ثنائی ابتداء از a میشود $m-1$ (و اگر aa را هم محسوب میداشتیم عدد ترتیبات ثنائی میشد m) و حال اگر بعد از b سایر حروف را قرار دهیم عدد ترتیبات ثنائی ابتداء از b میشود $m-1$ باین صورت

صورت بج تا و نه تا و لک تا و بح تا و لک تا .... وهکذا ابرای تا میشود
بح تا و کا نه و لک نه و لا نه و لک نه .... وازاین قرار هر حرفی را $m-1$
ترتیب ثنائی است و چون بهمه جهة ما را m حرف بود پس $m(m-1)$
عدد ترتیبات ثنائی هست که بتوان در m حرف باقسام مختلف تشکیل نمود
و هرگاه در پهلوی هر ترتیب ثنائی قرار دهیم سائر حروف باقی را ترتیبات ثلاثی
تشکیل شود از کا به چنین نه کا به و نه کا به و بح کا به و لک کا به ....
واز نه به چنین کا نه به و لک نه به و بح نه به و لک نه به و .... واز
لک به چنین کا لک به و نه لک به و بح لک به و لک لک به .... وهکذا
سایره چنانچه دیدید چون هر ترتیب ثنائی را $m-2$ ترتیب ثلاثی است
و عدد ترتیبات ثنائی چنین بود $m(m-1)$ پس عدد ترتیبات ثلاثی
که در m حرف بتوان تشکیل نمود مطابق است با این حاصل ضرب
$m(m-1)$ در $m-2$ یعنی $m(m-1)(m-2)$
و بهمین دلیل واضح میشود که عدد ترتیبات رباعی در m حرف این است
$m(m-1)(m-2)(m-3)$ و ترتیبات خماسی اینست
$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)$ وغیره
و خلاصه عدد ترتیبات n ثنائی اینست

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\cdots[m-(n-1)]$$

و چون

وچون $1+m-n=(n-1)-m$ دستور مذکور باین شکل در آید

$$m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)\cdots(m-n+1)$$

وبازا آنحالتی که فرض کنیم $n=8$ و $m=10$ وحروف را بمقادیر خود بدل کنیم دستور چنین شود

$$10(10-1)(10-2)(10-3)(10-4)(10-5)(10-6)(10-8+1)=$$

$$=10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3=1814400$$

وبنابراین ده حرف که ترتیبات ثمانی نمایم عدد اقسام ممکنه اش **اینست** ۱۸۱۴۴۰۰

تنبیه - حرف n باید همیشه کوچکتر باشد از m چراکه اگر فرض کنیم $m=n$ آنوقت عمل ما تبدیل بندیست نه ترتیب بندی

۲۸۸ - در محاسبه ترکیب بندیهای n تائی در m حرف - در فوق ذکر شد که عدد ترتیب بندیهای یکتائی در m حرف میشود m اما چون همه مختلف اند (۲۸۵) عدد ترکیب بندیهای آنها نیز m هست و ترتیب بندی ثنائی در دو حرف a و b اینست ab و ba وچون این دو دسته مؤلف اند از یک جنس حروف کسب ترکیب بندی زیاده از یک قسم محسوب نمیشود (۲۸۵) ودر سه حرف ترتیب بندی ثنائیش اینست $6=(3-1)3$ وازاین قرار سه حرف a و b و c را ترتیب بندیهای ثنائی شش گانه اینست

ab	ba	ca
ac	bc	cb

حال

حال میخواهیم ترکیب بندهای ثنائی همین حروف را معلوم کنیم چون این شش دسته را شش حاصل ضرب فرض کنیم می بینیم که سه تای آنها مختلف اند ab و ac و bc ($ab = ba$ و $ac = ca$ و $bc = cb$) پس از میان شش ترتیب بندی مذکور سه ترکیب بندی خلاصه میشود

حاصل آنکه در ترتیب بندی ثنائی سه حرف عدد اقسام این بود ۶ = (۳-۱)۳

وحال آنکه در ترکیب بندی ثنائی همان حروف عدد اقسام اینست ۳ = $\frac{۳(۳-۱)}{۲}$

در چهار حرف a و b و c و d عدد ترتیب بندهای ثنائی اینست

۴(۴-۱) = ۱۲

ab	ba	ca	da
ac	bc	cb	db
ad	bd	cd	dc

اما چون بیش از شش حاصل ضرب مختلف ab و ac و ad و bc و bd و cd نداریم عدد ترکیب بندهای ثنائی چهار حرف چنین میشود

$\frac{۴(۴-۱)}{۲}$ = ۶

وبهمین وجه معلوم میشود که ترکیب بندهای ثنائی پنج حرف اینست

$\frac{۵(۵-۱)}{۲}$ = ۱۰ وهکذا مابعد

پس بطور کلی عدد ترکیب بندهای ثنائی m حرف این است

$$\frac{m(m-1)}{۲}$$

از این

از این دستور چنین معلوم میشود که عدد ترکیبات ثنائی نصف عدد ترتیبات ثنائی باشد

و اما عدد ترتیب بندیهای ثلاثی در چهار حرف از این دستور در آید

$4(4-1)(4-2) = 4\cdot3\cdot2 = 24$ و اگر چهار حرف مذکور را a و b و c و d بگیریم ترتیبات ثلاثی چنین شود

abc	bac	cab	dab
abd	bad	cad	dac
acb	bca	cba	dba
acd	bcd	cbd	dbc
adb	bda	cda	dca
adc	bdc	cdb	dcb

و چون جمیع این حاصل ضربها را موازنه کنیم جز چهار حاصل مختلف نمی بینیم abc و abd و acd و bcd پس عدد ترکیبات ثلاثی که بتوان از چهار حرف ساخت این است $\frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot2\cdot3} = 4$

و بهمین وجه زود معلوم میشود که ترکیبات ثلاثی پنج حرف چنین است

$\frac{5(5-1)(5-2)}{1\cdot2\cdot3}$ و هکذا ابعد از آن

و بنابراین بطور کلی عدد ترکیبات ثلاثی در m حرف چنین میشود

$$\frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3}$$

و بهمین دستور که ترکیبات ثنائی و ثلاثی m حرف را حصر نمودیم عدد ترکیبات

رباعی

رباعی در m حرف از روی این دستور استخراج شود

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4}$$

و خماسی از این قرار

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}$$

پس از ترکیبات n تائی در m حرف از روی این دستور معلوم شود

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)(m-5)(m-6)\cdots(m-n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdots n}$$

از روی این دستور چنین معلوم میشود که در تحصیل ترکیبات n تائی که در m حرف میتوان ساخت باید قسمت نمود ترتیبات n تائی همان حروف را بر تبدیل بندهائی که بتوان در n حرف ساخت (۲۸۶)

مثلاً اگر بخواهیم ترکیبات عشری ۱۵ حرف را معلوم کنیم چنین نویسیم $m=15$ و $n=10$ و چون این مقادیر را در دستور مذکور قرار دهیم چنین شود

$$\frac{15(15-1)(15-2)(15-3)(15-4)(15-5)(15-6)(15-7)(15-8)(15-10+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} =$$

$$= \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} = \frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot4} = 7\cdot13\cdot3\cdot11 = 3003$$

و از این قرار پانزده حرف را چون ده ده ترکیب کنیم ۳۰۰۳ قسم ترکیب ممکن است صورت بندد

تنبیه — دران حالت که فرض کنیم $m = n$ بیش از یک ترکیب صورت نبندد و بسهولت توان از روی دستور مذکور این نکته را یافت باین شکل

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)\cdots(m-n+1)}{(m-n+1)\cdots(m-4)(m-3)(m-2)(m-1)m}$$

وچون صورت و مخرج این کسر برابرند حاصلش منجر میشود بواحدی

در علم ترکیب بندی بدون زحمتی ما را دلالت کند بدستور عمومی جملتین نیوتن

موافق (۲۸۲)

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6ab^5+b^6$$

چون

$$4=\frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3} \quad و \quad 6=\frac{4(4-1)}{1\cdot 2}$$

$$5=\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ 10=\frac{5(5-1)(5-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ 10=\frac{5(5-1)}{1\cdot 2}$$

$$15=\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4},\ 20=\frac{6(6-1)(6-2)}{1\cdot 2\cdot 3},\ 15=\frac{6(6-1)}{1\cdot 2}$$

$$6=\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}$$

پس میتوان چنین نوشت

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+\frac{4(4-1)}{1\cdot 2}a^2b^2+\frac{4(4-1)(4-2)}{1\cdot 2\cdot 3}ab^3+b^4$$

$$(a+b)^5=a^5+5a^4b+\frac{5(5-1)}{1\cdot 2}a^3b^2+\frac{5(5-1)(5-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^2b^3+$$

$$+\frac{5(5-1)(5-2)(5-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}ab^4+b^5$$

$$(a+b)^6=a^6+6a^5b+\frac{6(6-1)}{1\cdot 2}a^4b^2+\frac{6(6-1)(6-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^3b^3+$$

$$+\frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^2b^4+$$

$$+ \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)(6-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} a b^5 + b^6$$

در این سه قوه جملتین $a+b$ معتبر جمله دوم بعینه درجه ترقی جملتین مثبت و معتبر جمله

سیم مؤلف است از ترکیبات ثنائی که بتوان تشکیل نمود از حروفی چند به دو در بدو ه

جملتین باشد و معتبر جمله چهارم ترکیبات ثلاثی است از همان عده حروف و لد

جملهای بعد معتبرها مؤلف اند از ترکیبات رباعی و خماسی و غیره که بتوان ساخت

از عده حروفی برابر درجه قوت جملتین

و همین راه را باید پیمود برای قوت هفتم و هشتم و .... جملتین $a + b$ پس حکم

صحیح است برای قوت m ام همان جملتین باین شکل

$$(a+b)^m = a^m + m a^{m-1} b + \frac{m(m-1)}{1\cdot2} a^{m-2} b^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1\cdot2\cdot3} a^{m-3} b^3 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^{m-4} b^4 + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\dots(m-m+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\dots m} a^{m-m} b^m \dots + b^m$$

و در آن حالت که فرض کنیم $m = 9$ و آنرا در دستور مذکور قرار دهیم چنین شود

$$a^9 + 9a^8 b + \frac{9(9-1)}{1\cdot2} a^7 b^2 + \frac{9(9-1)(9-2)}{1\cdot2\cdot3} a^6 b^3 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)}{1\cdot2\cdot3\cdot4} a^5 b^4 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5} a^4 b^5 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6} a^3 b^6 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)}{1\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot6\cdot7} a^2 b^7 + \frac{9(9-1)(9-2)(9-3)(9-4)(9-5)(9-6)(9-8+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8} a b^8 + b^9$$

یا $\text{س}^{9} + 9\,\text{س}^{8}\,\text{ک} + 36\,\text{س}^{7}\,\text{ک}^{2} + 84\,\text{س}^{6}\,\text{ک}^{3} + 126\,\text{س}^{5}\,\text{ک}^{4} + 126\,\text{س}^{4}\,\text{ک}^{5} + 84\,\text{س}^{3}\,\text{ک}^{6} +$

$+ 36\,\text{س}^{2}\,\text{ک}^{7} + 9\,\text{س}\,\text{ک}^{8} + \text{ک}^{9}$

* فصل پنجم

در کسور متصله که مسلسله نیز گوئیم

۲۸۹ - کسر متصل آنست که مخرجش عدد صحیح باشد باضافهٔ کسری که در جای آن
خود مخرجش عدد صحیح باشد باضافهٔ کسری دیگر و هکذا و بدنبال آن
مثلاً این دو کسر ذیل متصل اند

$$2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}}}}\ \cdots \qquad\qquad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{9+\cfrac{3}{7}}}}}}$$

سایر کسوری که مؤلف کسری متصل هستند موسوم اند بجزو متمم و هر قطعه از
کسر متصل را کوچک باشد یا بزرگ که بآنجا قناعت نموده باشیم محدود
و ابتر گوئیم و آن باید از مبداء کسر متصل شروع شده باشد مثل
2 و $2+\frac{1}{3}$ و $2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}$ که هر سه ابترند و محدود و این اجزای کسر متصل را
چون تحویل کنیم بکسور متعارفه باز محدود گوئیم و چون آنها میل میکنند بسمت
حد مقدار کسر متصل کسور مائله نیز گوئیمشان

این نکته را باید ملتفت بود که در کسر متصل جمیع + ها تعلق دارند بمخارج پس

اگر

اگر بخواهیم اینها را کامل کنیم باید ابتدا کنیم. ما قبل آخر دسر بالا آئیم تا با اولی برسیم در آن حالت که کسر متصل محدود نباشد کسر متعارفی منتج آن کسری باشد بایل

۲۹۰ - مسئلهٔ ۱ - میخواهیم کسر متعارفی را بکسری متصل تحویل کنیم

مثلاً فرض کنیم که مقصود تحویل مقدار این کسر است $\frac{1597}{305}$ بکسری متصل بعد از رفع چنین شود $\frac{1597}{305} = 5 + \frac{72}{305}$ و چون هر دو جملهٔ کسر $\frac{72}{305}$ را بر صورت قسمت کنیم چنین شود $\frac{72}{305} = \frac{1}{4 + \frac{17}{72}}$ و بنابر این $5 + \frac{72}{305} = 5 + \frac{1}{4 + \frac{17}{72}}$ حال چون دو جملهٔ $\frac{17}{72}$ را بر صورت ۱۷ قسمت کنیم چنین شود $\frac{17}{72} = \frac{1}{4 + \frac{4}{17}}$ و چون در کسر سابق $\frac{17}{72}$ را بدل کنیم بمقدارش چنین شود

$$5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{4}{17}}}$$

و خلاصه چون عمل مذکور را در $\frac{4}{17}$ جاری کنیم همانطور که در $\frac{72}{305}$ و در $\frac{17}{72}$ نمودیم کسر متصلی بدست آید معادل با کسر متعارفی مفروض

$$5 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{4}}}}$$

۲۹۱ - مسئلهٔ ۲ - مطلوب است کسر متعارفی مولد کسر متصلی

مثلاً میخواهیم معلوم کنیم کسر متعارفی معادل این کسر متصل را

$$\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{5 + \cfrac{1}{7}}}}}$$

مخرج ٥ را تجنیس به سبع میکنیم $\frac{35}{7}=5$ و چون باید $\frac{1}{7}$ را بر ٥ افزود میشود

و آنوقت کسر مفروض چنین میشود $5+\frac{1}{7}=\frac{35}{7}+\frac{1}{7}=\frac{36}{7}$

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{\frac{36}{7}}}}}$$

امّا $\frac{1}{\frac{36}{7}}=\frac{7}{36}$ (چراکه این کسر قسمت ۱ است بر $\frac{36}{7}$ و در قسمت صحیح بر کسری باید عدد صحیح را ضرب نمود در کسر مقسوم علیه که عکس شده باشد)

و از این قرار باید بر مخرج ٣ افزود $\frac{7}{36}$ را و $\frac{108}{36}=3$ بنابراین

$3+\frac{7}{36}=\frac{108}{36}+\frac{7}{36}=\frac{115}{36}$ و کسر متصل ما چنین میشود

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\frac{36}{115}}} \quad \text{یا} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\frac{115}{36}}}}$$

و چون بر مخرج ٤ باید افزود کسر $\frac{36}{115}$ را آنرا تجنیس میکنیم میشود $4=\frac{460}{115}$

پس $4+\frac{36}{115}=\frac{460}{115}+\frac{36}{115}=\frac{496}{115}$ و کسر مفروض چنین میشود

$$\cfrac{1}{2+\frac{115}{496}} \quad \text{یا} \quad \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\frac{496}{115}}}$$

و بالجمله عمل مذکور را در مخرج ٢ جاری میکنیم یعنی آنرا تجنیس میکنیم $2=\frac{992}{496}$

و $2+\frac{115}{496}=\frac{992}{496}+\frac{115}{496}=\frac{1107}{496}$

پس کسر مفروض مساوی میشود باین کسر $\frac{1}{\frac{1107}{496}}$ یا $\frac{496}{1107}$ و در راه تحقیق

عمل

عمل اینست که همین را بکسر متصل تحویل کنیم از روی این دو مثال معلوم میشود
که تحویل کسر متعارفی بکسر متصل و عکس آن را هیچ اشکالی نیست
و قبل از ختم کلام این نکته را هم بنمائیم که ابتر ها نوبه بنوبه یکی کوچکتر است از مقدار
کسر متصل و یکی بزرگتر مثلا در این کسر متصل

$$2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cdots}}}$$

ابتر ۲ معلوم است کوچکتر باشد چونکه از کسر $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cdots}}$ چشم پوشیدیم
اما ابتر $2+\frac{1}{2}$ قدری بزرگتر هست چرا که به ۲ افزوده ایم کسر $\frac{1}{2}$ را
که بزرگتر از ماخذ است چونکه مخرجش کوچکتر شده (مخرج ۲ کوچک است
باید براو کسر $\frac{1}{4}$ را افزود چون کسر باین شکل است $\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$) ابتر $2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}$
قدری کوچکتر شده چونکه کسر $\frac{1}{4}$ بزرگتر از ماخذ است (و باید بر مخرج این
کسر $\frac{1}{3}$ افزوده شده باشد چنانچه می بینید $\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}$) و باید به مخرج ۲ از کسر $\frac{1}{2}$ اضافه
شود آنوقت این کسر کوچکتر میشود و بعد از آن خود ابتر

و چون باین دلیل پیش رویم معلوم میشود که جمع ابترهای بمقدار اول قدری
بزرگتر است و جمع پنج مقدار اول قدری کوچکتر و هکذا ما بعد پس حاصل انکه
ابترهای مراتب فرد قدری کوچکتر از مراتب زوج قدری بزرگتر
و اگر کسر متصل ها ابتدا نشده باشد بعد صحیح آن وقت حکم
بر خلاف مذکور است

فصل

فصل ششم

در بعضی خصائص اعداد

در خصائص عدد ۳

۲۹۲ - هر عدد فرد اول را (بجز ۳) چون واحدی بران بیفزائیم یا بکاهیم قابل قسمت میشود بر سه چراکه هر عدد اول مضرب ۳ است باضافه ۱ یا ۲. مثلا ۷ مضرب ۳ است بعلاوه ۱ چونکه ۱ + ۶ = ۷ و ۱۷ مضرب ۳ است بعلاوه ۲ چونکه ۲ + ۱۵ = ۱۷ وهکذا و ازاینجا نتیجه میشود که اگر عدد اول مضرب ۳ باشد بعلاوه ۱ (۱ + ۱۸ = ۱۹) و واحدی از او کسر کنیم قابل قسمت میشود بر ۳ (۱۸ = ۱ - ۱۹) و اگر عدد اول مضرب ۳ باشد باضافه ۲ (۲ + ۲۱ = ۲۳) چون واحدی بران اضافه کنیم قابل قسمت میشود بر ۳ و ازاین قرار هر عدد اول را چون باقتضای مقام واحدی بیفزائیم یا بکاهیم همواره قابل قسمت میشود بر ۳

در عدد ۶

۲۹۳ - هر عدد اولی را (غیر از ۲ و ۳) چون واحدی بیفزائیم یا بکاهیم قابل قسمت میشود بر ۶

برهان هر عدد اول را چون واحدی بیفزائیم یا بکاهیم زوج شود و قابل قسمت بر ۲ ۶ = ۱ + ۵ و ۱۲ = ۱ - ۱۳ و غیره اما هر عدد اول را باقتضای حالت واحدی بکاهیم یا بیفزائیم نیز قابل قسمت شود بر ۳ سابق و هر عدد

که قابل

که قابل قسمت باشد بر ۲ و بر ۳ قابل قسمت میشود بر ۶ (در حساب ذکر شده که هر عددی که قابل قسمت باشد بر چند عدد اول قابل قسمت باشد بر حاصل ضرب آنها مثلا ۶ و ۵ چون قابل قسمت است بر دو عدد متباین ۲ و ۹ قابل قسمت باشد بر حاصل ضرب آنها ۱۸) هذا المطلوب

مثالها

۳۰=۱+۲۹ و ۳۶=۱−۳۷ و ۴۲=۱+۴۱ وغیره اعداد ۳۰ و ۳۶ و ۴۲ همگی قابل قسمت اند بر ۶

در عدد ۹

۲۹۴ − هر عدد چون مجموع صور ارقام مطلقه اش را جمع کنیم ۹ شود یا مضرب ۹ آن عدد قابل قسمت است بر ۹

و از این حکم چنین استنباط شود که هر عدد را چون ضرب کنیم در ۹ حاصل عددی شود که مجموع ارقامش ۹ شود یا مضربی از ۹ مثلا

۹	۹	۹	۹	۹	۹
۶	۵	۴	۳	۲	۱
۵۴	۴۵	۳۶	۲۷	۱۸	۹

۹=۹ و ۱+۸=۹ و ۲+۷=۹ و ۳+۶=۹ و ۴+۵=۹ و ۵+۴=۹ وغیره

و عدد ۳ نیز دارای همین خاصیت است

هر عدد که مجموع صور ارقامش ۳ شود یا مضربی از ۳ قابل

قسمت

قسمت شود بر ۳

در عدد ۳۷

۲۹۵- عدد ۳۷ را چون ضرب کنیم در جملهای این سلسلهٔ عددی

۲۷ ، ۲۴ ، ۲۱ ، ۱۸ ، ۱۵ ، ۱۲ ، ۹ ، ۶ ، ۳ ÷ حاصل

ضربها چنین میشوند

۳۷ × ۳	۳۷ × ۶	۳۷ × ۹	۳۷ × ۱۲	۳۷ × ۱۵	۳۷ × ۱۸	۳۷ × ۲۱	۳۷ × ۲۴	۳۷ × ۲۷
۱۱۱	۲۲۲	۳۳۳	۴۴۴	۵۵۵	۶۶۶	۷۷۷	۸۸۸	۹۹۹

در عدد تام

۲۹۶- هر عددی که مجموع کسورش یعنی عادکنندهایش برابر خود آن عدد شود تام گوئیم

مثلاً ۶ عدد تام است چون مجموع عادکنندهایش (۱ و ۲ و ۳) ۶ میشود و در کفایة الحساب صفحهٔ ۱۴۶ قاعدهٔ یافتن عدد تام را ذکر نموده ام و از روی جدول ذیل معلوم میشود که عدد تام چه قدر نادر است

۶
۲۸
۴۹۶
۸۱۲۸
۳۳۵۵۰۳۳۶
۸۵۸۹۸۶۹۰۵۶
۱۳۷۴۳۸۶۹۱۳۲۸
۲۳۰۵۸۴۳۰۰۸۱۳۹۹۵۲۱۲۸

و عدد تام همیشه منتهی میشود به ۶ یا به ۲۸ اما عکس این حکم صحیح نیست یعنی هر عددی که منتهی شده باشد به ۶ یا ۲۸ تام نیست

اعداد متحابه

و یا دو عدد دیگر مجموع کسور یا اجزاء کننده‌های یکی برابر شود با خود عدد دیگر و بالعکس آنها را اعداد متحابه گویند مثل ۲۲۰ و ۲۸۴ و در کفایة الحساب ص ۱۰۶ دستور یافتن چنین دو عدد را ذکر نموده ام

تفاضلات عجیبه

۲۹۷ — چون سلسلهٔ مربعات اعداد متوالیهٔ طبیعی را بنگاریم یعنی ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ... و تفاضلات هر کدام را با تالی بیشتر معلوم کنیم و باز تفاضلات تفاضلات آنها را بگیریم یعنی تفاضل دوم این تفاضلات را بگیریم همه مساوی میشوند هر کدام ۲ است چنانکه می بینید

مربعات ... ۴۹ ۳۶ ۲۵ ۱۶ ۹ ۴ ۱

تفاضل اول ... ۱۳ ۱۱ ۹ ۷ ۵ ۳

تفاضل دوم ... ۲ ۲ ۲ ۲ ۲

و اما در مکعبات اعداد طبیعی تفاضلات سیم آنها برابر میشوند و هر کدام ۶ است

مکعبات ... ۱۲۵ ۶۴ ۲۷ ۸ ۱

تفاضلات اول ۶۱ ۳۷ ۱۹ ۷

تفاضلات دوم ۲۴ ۱۸ ۱۲

تفاضلات سیم ۶ ۶

اعداد متشکله

۲۹۸ — و آنها عبارت از اعداد چند سلسله ذیل است

چون سلسله اعداد طبیعی را بنویسیم ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ... و جمله اول را بگیریم با مجموع دو جمله اول و مجموع سه جمله اول و همچنین الی آخر این اعداد بدست می‌آید ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و ۲۸ و ۳۶ و .... و آنها را مثلثه گوییم چون نماینده آحادیست که در تشکیل مثلثات لازم است چنانکه در شکل دیده میشود

س ۱

و اعداد مربعه ۱ و ۴ و ۹ و ۱۶ و ۲۵ و ۳۶ و ۴۹ و .... تولیدش نسبتش ۲ است و آنها نماینده خالها یا گلوله‌هاییست که بتوان باشکال مربع ترتیب داد

س ۲

و چنین عمل جمعی در جمله‌های سلسله حسابی ۱ و ۴ و ۷ و ۱۰ و ۱۳ و ۱۶ و ... نتیجه دهد اعداد ۱ و ۵ و ۱۲ و ۲۲ و ۳۵ .... را که اعداد مخمسه گوییم چون نماینده عده خالها یا گلوله‌هاییست که بتوان روی اضلاع و در درون مخمس منتظمی ترتیب داد س ۳

س ۳ و هرگاه س ۴

از جذر آنها حاصل است از جمله‌های این سلسله اعداد: ۱، ۵، ۱۲، ۲۲، ۳۵ ...

و هرگاه سلسلهٔ حسابی بگیریم ابتدا از ۱ و بقدر نسبت ۴ و چنان عمل جمعی در آن مجری داریم اعداد مسدس حاصل میشود باین ترتیب ۱ و ۶ و ۱۵ و ۲۸ و ۴۵ و ... یعنی معلوم میشود چند عدد خال یا گلوله بگیریم تا بتوان روی اضلاع دور درون مسدس منتظمی بچینیم الخ. و همین دستور اعداد مسبعه وغیره را توان یافت

* در اعداد مخروطیهٔ مثلثه

۲۹۹ — چون اعداد مثلثه ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ و ... را بگیریم و جمله های آنرا بشکل سابق جمع کنیم این اعداد بدست آید ۱ و ۴ و ۱۰ و ۲۰ و ۳۵ و ... که مخروطی مثلث گوئیم چرا که در تشکیل هرم مثلثی با گلوله ها یا غیره باید باین شماره گرفت ۱ و ۴ و ۱۰ و ۲۰ و ۳۵ و ... (از این قرار برای هرم مثلثی که مثلا دارای ۲۰ گلوله شود یکدانه بر راس میگذارند و بعد ۳ و بعد ۶ و بعد ۱۰ گلوله بر زمین مینهند و باین ترتیب ظاهر است که چون از راس شروع بشمار نمائیم گلوله های هرم مثلث را اعداد مثلثه سابق بدست می آید ۱ و ۳ و ۶ و ۱۰ و ۱۵ و ۲۱ وغیره)

در اشکال طلسمی

۳۰۰ — علم اعداد که عبارت از دستور پر کردن مثلثات و مربعات و مخمسات وغیره هست بر وجهیکه وفق بدهند علم طویل الذیلی هست که معتقد باین خواص برای هر شکل معتقد بوده اند مثل جدول صد اند رصد و مارا بخواص آنها کاری نیست.

میشت خود این هنر محل عناست و مرحوم فاضل یگانه والد حقیر کتابها در این فن پرداخته چنانکه در حل معادلات درجات عالیهٔ جبر و مقابله قواعد سهل ممتنعی وضع نموده اند و همچنین برای وضع و ترتیب جداول لگاریتم من جمله پر کردن مثلث یعنی مربعی که هر ضلعش سه خانه باشد در سه

وفق ۳۴

۱	۱۵	۱۴	۴
۱۲	۶	۷	۹
۸	۱۰	۱۱	۵
۱۳	۳	۲	۱۶

س ۴

وفق ۶۹

۲۲	۲۷	۲۰
۲۱	۲۳	۲۵
۲۶	۱۹	۲۴

س ۳

وفق ۴۲

۱۳	۱۸	۱۱
۱۲	۱۴	۱۶
۱۷	۱۰	۱۵

س ۲

وفق ۱۵

۴	۹	۲
۳	۵	۷
۸	۱	۶

س ۱

شکل اول و مربع آنست که هر ضلعش چهار خانه باشد و مخمس آنکه پنج خانه باشد در س ۱ جمع هر ستون و هر قطری ۱۵ هست و در س ۲ ۴۲ و در س ۳ ۶۹ هست و در مربع ۳۴ و در مثلثات اینجا اعداد متوالیه هست در اولی از ۱ تا ۹ و در دومی از ۱۰ تا ۱۸ و در سومی از ۱۹ تا ۲۷

* ۳۰۱ — در مثلث حسابی پاشکال این شخص (۱۰۳۳ هجری - ۱۶۲۳)

نظیر کشاجم بوده گاه ریاضی و گاه طبیعی و گاه منشی بوده

۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	اعداد ثابته
	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	اعداد طبیعی
		۱	۳	۶	۱۰	۱۵	۲۱	۲۸	۳۶	۳۵	اعداد مثلثه
			۱	۴	۱۰	۲۰	۳۵	۵۶	۸۴	۱۲۰	هرم مثلث یا هرم رتبهٔ اولین
				۱	۵	۱۵	۳۵	۷۰	۱۲۶	۲۱۰	هرم رتبهٔ دومین
					۱	۶	۲۱	۵۶	۱۲۶	۲۵۲	هرم رتبهٔ سیمین
						۱	۷	۲۸	۸۴	۲۱۰	هرم رتبهٔ چهارمین
							۱	۸	۳۶	۱۲۰	
								۱	۹	۴۵	
									۱	۱۰	

ترتیبیه

ترتیب این مثلث را اشکال بنت و آنا خاصیتش

اولا - همانطور که در همین جدول نوشته ایم بندهای افقی مشتمل اند بر اعداد طبیعی و مثلثه و اهرامی رتبهٔ اول و دوم و غیره و این خاصیت لازمه وضع ترتیب جدول آن یعنی بالتبع نتیجه شده

ثانیا - همین اعداد بعینه در بندهای اوتار مثلث قائم الزاویه یافت میشوند

ثالثا - بندهای قائم معتبرهای قوای مختلفه جملتین نیوتن است مثلا اگر بخواهیم ک + س را بقوت هشتم رسانیم باید معتبرها را در بند نهم قائم طلب نمود چنین باشند ۱ و ۸ و ۲۸ و ۵۶ و ۷۰ و ۵۶ و ۲۸ و ۸ و ۱

فصل هفتم

مسئله

۳۰۲ - در مثلثی سه ضلعش معلوم است و مطلوب باشد مساحتش

قبل از ورود در شرح مسئله چند تساوی اینجا من باب یادآوری باز می آوریم

$$\text{س}^2 - \text{ک}^2 = (\text{س} + \text{ک})(\text{س} - \text{ک}) \qquad (1)$$

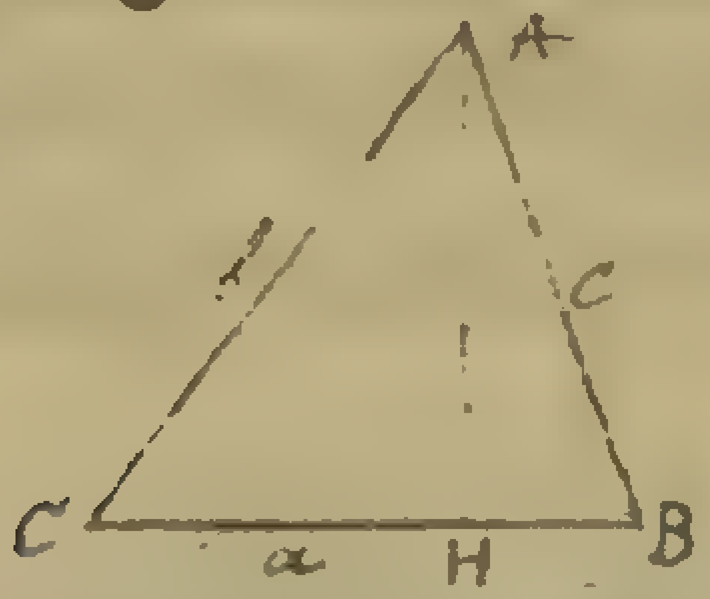
از این تساوی معلوم میشود که تفاضل دو مربع برابر است با مسطح مجموع دو ضلع آنها در تفاضل همان دو ضلع

$$2\,\text{س}\,\text{ح} + \text{س}^2 + \text{ح}^2 = (\text{س} + \text{ح})^2 \qquad (2)$$

$$2\,\text{س}\,\text{ح} - \text{س}^2 - \text{ح}^2 = -(\text{س} - \text{ح})^2 \qquad (3)$$

معرفت

معرفت این سه تساوی ما را کافیست در یافتن راه حل این مسئله



در مثلث ABC من باب اختصار فرض میکنیم $AB = c$ و $AC = b$ و

$AH = h$ و $BH = x$ و $BC = a$

وچون T را سطح مثلث ABC فرض کنیم چنین شود

$$T = \frac{a}{2} h$$

وحالا h را از روی سه ضلع معلوم a و b و c استخراج کنیم

نظر بخصوصیت مثلث قائم الزاویه

$$(1) \qquad h^2 = c^2 - x^2$$

وچون $CH = a - x$ این تساوی حاصل شود

$$(2) \qquad h^2 = b^2 - (a - x)^2 = b^2 - a^2 - x^2 + 2ax$$

واز معادلهٔ (۱) مقدار x^2 را بیرون آوریم وبعد x را

$$x^2 = c^2 - h^2$$

$$x = \sqrt{c^2 - h^2}$$

وچون این مقادیر را در معادلهٔ (۲) گذاریم چنین شود

$$h^2 = b^2 - a^2 - (c^2 - h^2) + 2a\sqrt{c^2 - h^2}$$

$$h^2 = b^2 - a^2 - c^2 + h^2 + 2a\sqrt{c^2 - h^2}$$

$$h^2 - b^2 + a^2 + c^2 - h^2 = 2a\sqrt{c^2 - h^2}$$

$$a^2 + c^2 - b^2 = 2a\sqrt{c^2 - h^2}$$

$$\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a} = \sqrt{c^2 - h^2}$$

و چون هر عضو را بمربع رسانیم چنین شود

$$\frac{(a^2 + c^2 - b^2)^2}{4a^2} = c^2 - h^2$$

و چون $4a^2$ را بیرون کنیم چنین شود

$$(a^2 + c^2 - b^2)^2 = 4a^2c^2 - 4a^2h^2$$

$$4a^2h^2 = 4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2$$

اما موافق تساوی (۱)

$$4a^2c^2 - (a^2 + c^2 - b^2)^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$$

پس

$$4a^2h^2 = (2ac + a^2 + c^2 - b^2)(2ac - a^2 - c^2 + b^2)$$

و چون بنابر تساوی (۲)

$$2ac + a^2 + c^2 - b^2 = (a + c)^2 - b^2$$

و بنابر تساوی (۳)

$$2ac - a^2 - c^2 + b^2 = -(a - c)^2 + b^2 = b^2 - (a - c)^2$$

پس

پس $4a^2h^2 = \left[(a+c)^2 - b^2\right]\left[b^2 - (a-c)^2\right]$

امّا بنابر مسئلهٔ (۱) $(a+c)^2 - b^2 = (a+c+b)(a+c-b)$

و $b^2 - (a-c)^2 = (b+a-c)(b-a+c)$

پس چنین شود

$$4a^2h^2 = (a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)$$

$$h^2 = \frac{(a+c+b)(a+c-b)(b+a-c)(b-a+c)}{4a^2}$$

و چون فرض کنیم $a+c+b = 2p$

چنین شود $a+c-b = 2p-2b = 2(p-b)$

چراکه $a+c-b+2b = 2p$

پس $a+c-b = 2p-2b = 2(p-b)$

و بهمین وجه معلوم میکنیم که

$$b+a-c = 2p-2c = 2(p-c)$$

$$b-a+c = 2p-2a = 2(p-a)$$

و از اینجا چنین استنباط شود

$$h^2 = \frac{2p \cdot 2(p-b)\,2(p-c)\,2(p-a)}{4a^2} = \frac{4p(p-b)(p-c)(p-a)}{a^2}$$

$$h = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$T = \frac{a}{2}h = \frac{a}{2}\times\frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$T=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

از روی این دستور چنین معلوم میشود که بر فرض معلوم بودن هر سه ضلع مثلث راه یافتن مساحتش اینست که از نصف مجموع اً لسه ضلع یک یک اضلاع را تفریق کنیم و بعد این سه باقی را ضرب کنیم در همدیگر و در همان نصف مجموع و بعد جذر حاصل را بگیریم

من باب مثال در آن مثلث فرض میکنیم

$$a=۴۵۰$$
$$b=۸۹۲$$
$$c=۷۷۰$$

آنوقت

$$۲s=۴۵۰+۸۹۲+۷۷۰$$

$$s=\frac{۴۵۰+۸۹۲+۷۷۰}{۲}=۱۰۵۶$$

$$s-a=۱۰۵۶-۴۵۰=۶۰۶$$

$$s-b=۱۰۵۶-۸۹۲=۱۶۴$$

$$s-c=۱۰۵۶-۷۷۰=۲۸۶$$

$$T=\sqrt{۱۰۵۶\times۶۰۶\times۱۶۴\times۲۸۶}$$

$$T^{۲}=۱۰۵۶\times۶۰۶\times۱۶۴\times۲۸۶$$

لت ۲ T = لت ۱۰۵۶ + لت ۶۰۶ + لت ۱۶۴ + لت ۲۸۶

لت ۱۰۵۶ =	۳٫۰۲۳۶۶
لت ۶۰۶ =	۲٫۷۸۲۴۷
لت ۱۶۴ =	۲٫۲۱۴۸۴
لت ۲۸۶ =	۲٫۴۵۶۳۷
لت ۲ T =	۱۰٫۴۷۷۳۴

لف T = ۱۰٫۴۷۷۳۴ / ۲ = ۵٫۲۳۸۶۷

T = ۲۴۸٫۱۷۳۰ ذرع مربع

فصل هشتم *

در جواب مسائل سبعه لاینحل آخر خلاصة الحساب

که حقیر عبدالغفار در سال ۱۲۷۵ حل نموده در موقعی که مرحوم میر سید علی مجدالاشراف من باب امتحان یکی از آنها را سؤال نمود حقیر تعهده کرده که در ظرف یک هفته هر هفت مسئله را حل نماید والحمدلله از عهده برآمد و رسالهٔ در کلیات آنها ترتیب داده بامر شاهنشاه شهید همانسال طبع شد و حاصل آنها را اینجا محض یادگار نقل میکند اگرچه با این اصول مناسبتی ندارد چون بعضی منتهی میشوند بمعادلات درجات عالیه که بدستوریکه مرحوم والد وضع نموده حل کردم و بعضی مسئلات درجات عالیه اند که خود حقیر قانون آنرا یافته و دستور حل معادلات درجات

المسئلة الاولی — عشرة مقسومة بقسمین اذا زید علی کل جذره وضرب المجتمع فی المجتمع حصل عدد مفروض

جواب اگر آن عدد مفروض را ۲۴ فرض کنیم مسئله ممکن و جواب چنین میشود قسمت کوچکتر از کنز ۹ و اگر ۲۴ نباشد منتها ۵۲ بشود و بیش نخواهد شد والا محال است پس یک قسمت را س فرض کنیم قسمت دیگر میشود س‍ح و عدد مفروض را ه‍ و دو معادله چنین میشود

علامه: ... در صفحه ۳۵۷ و صفحه ۳۱۶ نمره ۵ ...

$$x + y = 10$$

$$(x + \sqrt{x})(y + \sqrt{y}) = 35$$

دور آخر چنین

$$\ldots + 4x^7 - 18x^6 - 38x^5 + 141x^4 + 250x^3 - 410x^2 - 700x + 1225 = 0$$

و از روی جدول ذیل که دستور حل معادلات عالیه است (ص ۳۰۷) جواب چنین میشود

$$x = 1{,}82119 \quad \text{وبعد} \quad y = 8{,}17881$$

المسئلة الثانیة ــ مجذور ان زدنا علیه عشرة کان للمجتمع جذر او نقصنا منه کان للباقی جذر

مسئله را بمعادله تحویل میکنیم میشود

$$x^2 + 10 = y^2$$

$$x^2 - 10 = z^2$$

در رساله مذکوره ثابت نموده‌اند که چنین عددی منطق غیر ممکن است

المسئلة الثالثة ــ اقرّ لزید بعشرة الا جذر ما لعمرو ولعمرو بخمسة الا جذر ما لزید.

بعد از تحویل بمعادله چنین میشود

$$x^2 = 10 - y$$

$$y^2 = 5 - x$$

دور آخر چنین یعنی معادلهٔ درجهٔ چهارم

$$y^4 - 10y^2 + y + 15 = 0$$

جواب منطق ندارد اما با کسر اعشار چنین میشود سهم زید و عمرو

$y^2 = ۲٫۰۷۴۲۶$

$x^2 = ۸٫۵۵۹۷۵$

المسئلة الرابعة ـ عشرة مقسومة بقسمین اذا قسمنا کلا منهما علی الآخر
وجمعنا الخارجین کان المجتمع مساویا لاحد قسمی العشرة

بعد از تحویل بمعادله چنین $x + y = ۱۰$

$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = y$

وبعد از حسابها $x^3 - ۸x^2 - ۲۰x + ۱۰۰ = 0$

معادله هست از درجه سیم قسمت اقل $x = ۲٫۸۷۸۴۳$

و در صورتیکه معادل قسمت اقل یکبر بر قسمت اکثر $y = ۷٫۱۲۱۷$
جوابش اینست

و هرگاه معادل قسمت اکثر فرض کنیم چنین

$x = ۱٫۰۱۲۷$

$y = ۸٫۹۸۷۳$

المسئلة الخامسة ـ مجذور اذا زید علیه جذره و درهمان
او نقص منه جذره و درهمان کان للمجتمع او الباقی جذر

بعد از تحویل بمعادله چنین شود

$x^2 + x + ۲ = y^2$

$x^2 - x - ۲ = z^2$

معادله سه مجهول سیالیه از درجه دوم ثنائیه بعد از حل چنین شود

$x = \frac{۳۴}{۱۵}$ ، $y = \frac{۴۶}{۱۵}$ ، $z = \frac{۴۲}{۱۵}$

المسئلة السادسة - ثلاثة مربعات متناسبة مجموعها مربع

بعد از تحویل بمعادله چنین شود

$$x^2 + y^2 + z^2 = w^2$$

$$x^2 : y^2 = y^2 : z^2$$

دور رساله ثابت نموده ام که عدد منطق باین صفات یافت نمیشود محال است

المسئلة السابعة - مکعب قسم بقسمین مکعبین

$$x^3 + y^3 = z^3$$

این مسئله نیز محال فرض شده و در آن رساله ثابت نموده ایم

کسی کمان نکند که مسئله دوم و ششم و هفتم را جواب نگفته‌ام اثبات استحاله خود جواب است

امثله و مسائل در همه مطالب کتاب

۱۵۹- این معادله را حل کنید $\frac{5}{3} = \frac{6}{x}$

۱۶۰- این معادله را حل کنید $\frac{15}{9} = \frac{18+x}{x}$

۱۶۱- این معادله را حل کنید $\frac{7+x}{3} + 5 = x + 4$

۱۶۲- این دو معادله را حل کنید

$$x - 2y + 5 = 0$$
$$2x - 3y + 3 = 0$$

۱۶۳- این چهار معادله را حل کنید

$$x + y + z + t = 15$$
$$x - 2y + z - t = 2$$
$$2x - 4y + 5z + 2t = 39$$
$$x - y - z + t = 3$$

۱۶۴- چون بر یک ربع عددی ۲۱ بیفزائیم حاصل شود ۹۰ این عدد کدام است ۲۷۶

۱۶۵- کدام عدد است که یک ثلث و یک ربعش جمعا بشود ۱۲۶

۱۶۶- تفاضل یک خمس و یک سدس عددی ۴ است آن عدد کدام است

۱۶۷- چون از $\frac{7}{6}$ عددی ۲ بکاهیم خود آن عدد حاصل شود کدام است آن

۱۶۸- مجموع سه عدد متوالی ۹۶ است کدام اند آن سه عدد

۱۶۹- مجموع سه عدد ۳۶۰ است و دومی یک ثلث اولی است و سومی $\frac{1}{8}$ دومی این سه عدد کدام اند

۱۷۰- پنج عدد مجموعشان ۱۶۰ است و تفاضلات متوالیه آنها ۲ کدام اند این اعداد

۱۷۱ – مطلوبست جملهٔ چهارم تناسبی که اولش ۹ است و حاصل ضرب وسطین ۴۵۰

۱۷۲ – مجموع سه عدد ۸۴ است و فضل اولی بر دومی ۸ و بر سیمی ۱۶ کدامند آن سه عدد

۱۷۳ – عدد ۸۹ را بر دو جزو کنید که چون اولی را بر ۸ قسمت کنیم و دومی بر ۵ جمع دو خارج قسمت بشود ۱۳

۱۷۴ – مبلغ ۵۸۸۰ قران را از قرار صد ۵ مدتی در مرابحه گذاشتیم و ۱۷۱٫۵ قران فایده داد مطلوب است مدت مرابحه

۱۷۵ – عدد ۸۴۰ را بر دو جزو قسمت کنید بنا بر یک سهم بقدر خمسی بزرگتر از دومی باشد

۱۷۶ – میخواهیم مبلغ ۱۳۶۰ قران را میان سه نفر قسمت کنید بر وجهیکه عدد قطعات پول آنها برابر باشد اما سهم اولی پنجهزاری طلا باشد بقیمت یکتومان دودومی پنجهزاری نقره باشد و سهم سیمی قران چرخی باشد

۱۷۷ – میخواهیم مبلغ ۳۷۲۰ قران میان چهار نفر چنان قسمت کنیم که اگر سهم اولی ۵ قران شود سهم دومی بشود ۷ و سهم سیمی بشود ۳ قران بنا بر آنکه دومی چهار قران برده باشد و بالجمله اگر سهم سیمی ۷ قران شده باشد چهارمی ۸ قران برده باشد حال مطلوب است سهم هر کدام

۱۷۸- خانهٔ را بمبلغ ۱۰۶۳۸ قران فروختند وحساب کردند نسبت بقیمت خرید از قرار صد ۸ نفع کرده پس قیمت خرید آن چه بوده

۱۷۹- تاجر مفلسی در عرض ما هر چیز را که ۱۶ قران می ارزید از قرار ۱۵ قران فروخت پس از قرار صد چند ضرر کرده

۱۸۰- شخص خیری خواست بداند که در یکسال چه قدر وجه بفقرا میدهد بنا بر انکه هر هفته یکصد دینار بر خیرات می افزاید در هفتهٔ اول یکصد دینار داده و هفتهٔ دوم ۲۰۰ در هفته سیم ۳۰۰ و هکذا تا هفتهٔ پنجاه و دوم

۱۸۱- متاعی که ۱۵ قران میارزید بمبلغ ۱۸ قران فروخته شده پس از قرار صد چند منفعت برده

۱۸۲- راه آهنی از لیون به پاریس است رسا اعنی ۳۲ کیلومتر میرود و پس از یکساعت دیگر واگون چاپاری حرکت نمود ساعتی ۴۵ کیلومتر و فاصلهٔ پاریس از لیون ۵۱۲ کیلو است حالا میخواهیم بدانیم که در چه فاصله از پاریس واگون چاپاری اولی را درک نموده است

۱۸۳- ضلع مثلث متساوی الاضلاعی را طول ضلع ۳۰ است پس مساحتش چه قدر است

۱۸۴- بر فرض که ع = ۳۰ مساحت آن مثلث بحسب ذرع مربع چه قدر است

۱۸۵- نسبت دو عدد مثل ۴ است به ۵ و حاصل ضرب آنها بعد از قسمت بر ۳۵ میشود ۱۰ کدام اند این دو عدد

۱۸۶ـ حاصل ضرب دو عدد ۱۰۸۰۰ است و یکی از آنها نصف دیگر است کدام اند آن دو عدد

۱۸۷ـ دو مبلغ سرمایه داریم یکی از قرار صدی ۴ بمعامله رفته و حاصل داده در یک سال بقدر ۳۱٫۲ قران زیاده بر منفعت سرمایه دیگر که از قرار صدی ۵ برابحه رفته مطلوب مبلغ هر یک است بنا بر آنکه تفاضل آنهم ۲۸۸۵ قران باشد

۱۸۸ـ عدد ۱۰۲ را بر سه جزو قسمت کنید چنانچه اولی سه برابر دومی باشد بعلاوهٔ ۳ قران و سیمی نصف دومی باشد

۱۸۹ـ دو مبلغ سرمایه بنسبت بهم مثل ۵ است به ۳ و جمعا در مدت یکسال مبلغ ۲۵۱٫۳ قران عاید ساختند حال مطلوب مبلغ هر یک است بنا بر آنکه اولی از قرار صدی ۴ برابحه داده باشند و دومی را از قرار صدی ۵

۱۹۰ـ عددی مطلوب است که فضل حاصل ضرب او در ۵ بنسبت به ۲۰ بعینه اندازهٔ کسر همان عدد باشد از ۲۰

۱۹۱ـ مساحت حجم کرهٔ این است $\frac{4\pi R^3}{3}$ این دستور را بفارسی تعبیر کنید

۱۹۲ـ و چون در دستور مذکور R را بدل کنیم به $\frac{D}{2}$ شکل دستور چه میشود

۱۹۳ـ دستور ثانی حجم کره را بعبارت رسمی ادا کنید

۱۹۴ـ در مسئله ۱۹۱ فرض کنیم $R = ۵٫۱$ و در مسئله ۱۹۲ فرض کنیم $R = \frac{۲}{۳}$ فرسخ و مطلوب است حجم دو کره

۱۹۵– شصت و چهارمین جزء مربع عددی قسمت بر موزون آن عدد میشود
۲۷ مطلوب است آن عدد

۱۹۶– حاصل ضرب $\frac{۳}{۵}$ عددی در $\frac{۳}{۴}$ آنعدد میشود ۱۸۰ مطلوب است
آن عدد

۱۹۷– نسبت دو مبلغ سرمایه مثل ۷ است به ۶ و اوّلی را از قرار صدی ۵
بر اجره رفته و دوّمی صدی ۶ مطلوب است آن دو مبلغ بنا بر آنکه جمع عایدی
هر دو در ظرف ۲ سال و ۳ ماه شده باشد ۷۹۶٫۵ قران

۱۹۸– علافی یک نوبت فروخت ۲۰۰ پیمانه گندم و ۷۵ پیمانه جو را بمبلغ
۹۱۲٫۵ قران در نوبت دیگر ۱۵۰ پیمانه گندم و ۱۲۷ پیمانه جو را بمبلغ
۷۸۷٫۵ قران مطلوب است قیمت هر پیمانه از گندم و جو

۱۹۹– میخواهیم مبلغ ۷۶۰۰ قران را میان ۳ نفر بنسبت سن شان
قسمت کنیم اوّلی ۲۰ ساله است و دوّمی ۲۴ ساله و سیّمی ۳۲ ساله

۲۰۰– مطلوب است تقسیم این عدد ۵۳۵۶ قران به ۳ جزء بعکس
نسبت این ۳ عدد ۲۰ و ۳۰ و ۴۰

۲۰۱– چه قدر باید ممزوج نمود گندم پیمانه ۲۸ قران را با گندم پیمانه ۲۰ قران
تا ۲۵۰ پیمانه شود بقیمت پیمانه ۲۲ قران

۲۰۲ میخواهیم دستور مساحت سطح کره را از روی محیطش تنها بنویسید

۲۰۳ - کدام است کسری که چون بر خود آن معکوساً قسمت کنیم خارج قسمتش بشود $\frac{9}{16}$

۲۰۴ - روغنی داریم سیری ۰ر۲۵ قران و روغنی سیری ۰ر۱۶ قران بچه نسبت مخلوط کنیم و چند سیر از هر کدام بگیریم تا ۱۸۰ سیر شود بقیمت سیری ۰ر۲۰ قران

۲۰۵ - حاصل ضرب دو عدد ۱۸۰ است و یکی بقدر $\frac{4}{5}$ دیگریست و ... مطلوب است آن دو عدد

۲۰۶ - مطلوب است شعاع دو دایره که تفاضل مساحت دو سطح آنها ۹٫۴۲۴۸ باشد و تفاضل خود آنها دو شعاع ۱

۲۰۷ - چون $\frac{3}{4}$ عددی را ضرب کنیم در $\frac{5}{2}$ آن عدد و حاصل را قسمت کنیم بر ۲ خارج شود ۱۲۱۵ کدام است آن عدد

۲۰۸ - مطلوب است صورت حجم کره از روی اندازه محیطش تنها

۲۰۹ - نسبت دو عدد مثل ۲ است به ۳ و حاصل ضربشان ۱۷۰۱۰۰ کدام اند آن دو عدد

۲۱۰ - دستور حجم مخروط ناقص این است $V=\frac{H}{3}\pi(R^2+r^2+Rr)$
پس اگر ۰ر۵ را = H ذرع باشد ۰ر۴۰ = R و ۰ر۳۰ = r حجم آن کره چه مبلغ میشود

۲۱۱ - دو عدد بر نسبت ۱ است و $\frac{3}{5}$ و حاصل ضرب آنها ۶۰ کدام اند آن دو عدد

۲۱۲– عدد ۴۲ را بدو جزو قسمت کنید چنانکه حاصل ضرب آنها بشود ۱۶۴۳

۲۱۳– این معادله را حل کنید $\frac{۲+۷}{x} - ۳ = ۲x - ۶$

۲۱۴– این معادله را حل کنید $(۵+x)(۵-x) = ۲۴$

۲۱۵– این معادلهٔ حرفی را حل کنید $(a+x)(a-x) = c+d$

۲۱۶– این معادله را حل کنید $\frac{ax+bx}{dx} + ex = c$

۲۱۷– این معادله را حل کنید $\frac{ax-bx^{۲}}{a} + dx = c$

۲۱۸– میخواهیم بدانیم این دستور $۲\pi RH$ در استوانه بچه معنی است

۲۱۹– چون دستور مساحت سطح کره را قسمت کنیم بر π چه خارج میشود

۲۲۰– جمع دو عدد ۲۵ است و حاصل ضرب آنها ۱۵۰ کدام اند این دو عدد

۲۲۱– مطلوب است دو عدد که تفاضلشان بشود ۳۰ و حاصل ضربشان ۲۸۰۰

۲۲۲– تفاضل دو ضلع مثلث قائم الزاویه ۵ ذرع است و مساحتش ۴۰ ذرع طول آن دو ضلع چه قدر است

۲۲۳– مساحت سطح کره در دست است و مطلوب باشد شعاع آن

۲۲۴– مجذور عددی قسمت بر $\frac{۱}{۱۳}$ آنعدد میشود ۱۱۷۰۰۰ کدام است آنعدد

۲۲۵– تفاضل دو عدد ۴ است و تفاضل مربع آنها ۸۰ کدام اند آندو عدد

۲۲۶– حجم کرهٔ در دست است و مطلوب باشد قطر آن

۲۲۷– مبلغ وجهی را بسود مرکب در مرابحه گذاشتند از قرار صدی ۵ و بعد

اندو سال اصلا فرعا شد ۳۸۲ قران مطلوب اصل سرمایه است

۲۲۸ - مساحت سطح کره در دست است و مطلوب باشد محیط عظیمه آن

۲۲۹ - تفاضل دو عدد ۱۰ است و تفاضل حاصل ضرب و مجموع آنها ۲۳۰ مطلوب است آن دو عدد

۲۳۰ - حجم کره در دست است و مطلوب باشد محیط عظیمه آن

۲۳۱ - گوگرد و شوره را ممزوج کردیم بنسبت ۵۵ جزو شوره و ۱۲٫۵ گوگرد تا بوزن ۱۲۰ من شد مطلوب است اندازهٔ هر کدام

۲۳۲ - معنی این دستور $H = \frac{3V}{\pi(R^2+r^2+Rr)}$ در مخروط ناقص چیست

۲۳۳ - چون در دستور $H=\frac{3V}{\pi(R^2+r^2+Rr)}$ فرض کنیم $R =$ ۵۰ سانتیمتر و $r =$ ۴۰ سانتیمتر و $V =$ ۴۶۰ دسیمتر مکعب آنوقت مقدار H چیست

۲۳۴ - در ساختن باروط جنگ رسم اینست که ۷۵ جزو از نترات دپتاس بگیرند (شوره) و ۱۲٫۵ جزو گوگرد و ۱۲٫۵ جزو زغال پس اگر ما را ۱۲۰۰ من باروط لازم باشد از هر کدام چند من لازم است

۲۳۵ - فلز ناقوس ترکیبی است از ۷۸ جزو مس و ۲۲ جزو قلعی و ما ترکیبی از این جنس داریم بوزن ۱۵۶۰ من میخواهیم بدانیم چه قدر قلعی باید بر آن افزود تا نسبت مس بقلعی بشود $\frac{86}{54}$ بنابر آنکه ابدا در وزن مس کم و زیادی نشده باشد

۲۳۶- این معادله را $V = \frac{H}{3}\pi(R^2 + r^2 + Rr)$ نسبت به R حل کنید

۲۳۷- ترکیبی داریم از سرب و برنج بوزن ۱۵۰ من و میدانیم که نسبت سرب به برنج مثل ۹ است به ۱۳ پس اگر بقدر ۱۵ من سرب بران اضافه کنیم نسبت میان دو فلز از چه قرار خواهد شد

۲۳۸- دو عدد مطلوب است که حاصل ضربشان بشود ۱۸ و جمع دو مربعشان ۴۵

۲۳۹- شخصی ۳ چیز مختلف خرید قیمت مجموع اوّل و دوّمی شد ۱۲ قران و قیمت اوّل و سیمی شد ۱۳ قران و قیمت دوّمی و سیمی شد ۱۵ قران حال مطلوب است قیمت هر یک

۲۴۰- شخصی ۲۴ کیل گندم ۴۰ قرانی مدیون است امّا دو جو گندم دارد کیلی ۴۵ و کیلی ۳۰ قران حال بچه نسبت آنهارا ممزوج کند تا نه ضرر کند و نه نفعی

۲۴۱- ترکیبی داریم از سرب و قلعی بوزن ۳۵۰ من و به نسبت ۱۵ و ۱۹ حال چه قدر سرب بران بیفزائیم تا نسبت بعکس مذکور شود

۲۴۲- تفاضل دو عدد ۱ است و جمع دو مربع آنها ۳۱۳ مطلوب است آن دو عدد

۲۴۳- شخص مقصری را مجبور کردند که در ظرف ۱ ساعت ۴۰ پارچه سنگی را

که به

که بر خطی مستقیم چیده شده اند بفاصله ۴ ذرع از یکدیگر جمع آوری کند به ترتیب در نقطه که بفاصله ۳ ذرع از اولی دور است مطلوب باشد تمام مسافتی که در اینمدت آن شخص می پیماید

۲۴۴ - مطلوب است نسبت حجم استوانه بحجم کره که دران محاط گشته

۲۴۵ - دو مبلغ سرمایه داریم اولی از قرار صد ۵ مدت ۷ ماه برابحه رفته و دومی از قرار صد ۴ در مدت ۳ ماه جمعاً ۴۰٫۲۰۸ قران عاید ساختند و نوبت دیگر همان دو سرمایه بهمان نرخ مبلغ ۱۵۹٫۵۰ قران فایده داد و از خارج میدانیم که اولی ۴ ماه برابحه بوده و دومی ۵ ماه مطلوب است مبلغ آندو سرمایه

۲۴۶ - مطلوب است نسبت حجم کره بحجم مخروطی که قاعده اش قطر کره باشد و ارتفاعش شعاع کره

۲۴۷ - نسبت دو عدد و مثل ۵ است به ۷ و حاصل ضرب آنها ۳۱۵ است مطلوب است آن دو عدد

۲۴۸ - سلسله عددی داریم جمله اولش ۴ و قدر نسبت ۳ مطلوب است جمله چهلم

۲۴۹ - سه رشته آب وارد آبخوری میشوند اولی اگر تنها جاری باشد در ۵ ساعت آنرا پر میکند و دومی تنها در ۸ ساعت و سیمی تنها در ۱۲ ساعت پس اگر با هم جاری شوند در چند ساعت پر کنند

۲۵۰- همین مسئله را بطور کلی جواب بگوئید

۲۵۱ - سه نفر خواستند در مبلغ سرمایهٔ کل ۳۰۰۰ تومان شارکت کنند واولی را
اگر بقدر نصف سرمایه دومی تنخواه اضافه بود تمام سرمایه را میداد و دومی را اگر
$\frac{1}{3}$ اضافه بود همان سرمایهٔ کل را میداد وسیمی را اگر $\frac{3}{4}$ دومی اضافه بود همان
مبلغ را داشت وبعد از شارکت مبلغ ۱۸۰ تومان منفعت بردند پس اگر این
مبلغ را بر نسبت سرمایهٔ آنها قسمت میکردیم سهم هرکدام چه مبلغ میشد

۲۵۲- دو مجری در ظرف ۱ ساعت ۲ $\frac{۲}{۵}$ $\frac{۲}{۵}$ آ حوضی را پر مینمودند واگر اولی
تنها جاری بود در ۳ ساعت آنجا را پر میکرد پس دومی تنها چه مدت پر میکند

۲۵۳- جمع دو عدد ۱۹ است وجمع مربعات آنها ۱۸۵ پس کدام اند آن دو عدد

۲۵۴- حوضی را سه لوله مجری است اولی تنها در پنج ساعت آنرا پر کند ودومی در
۸ ساعت وسیمی در ۱۲ ساعت پس اگر هر سه جاری باشند در چند ساعت
پر کنند بنابر آنکه زیرابی داشته باشد که در ۹ ساعت آنرا خالی کند

۲۵۵ - آبطهری را دو زیراب است یکی آنرا در ۲۵ ساعت خالی میکند ودیگری
در ۳۰ ساعت پس اگر هر دو باز باشند حوض در چند ساعت خالی میشوند

۲۵۶- دستور قسمت خطی بر نسبت ذات وسط وطرفین چیست

۲۵۷- واین دستور را در خط ۹۰ ذرعی جاری کنید

۲۵۸- مجموع دو مربع دو عدد ۳۱۳ است وتفاضل همان دو مربع

۲۵ مطلوب است آن دو عدد

۲۵۹ — دو عدد بر نسبت ۵ است به ۶ و مجموع دو مربع آنها ۲۴۴ کدام اند آن دو عدد

۲۶۰ — منشور مسدس القاعده داریم با ارتفاع ۵ ذرع و بضلع ۲ ذرع مطلوب است حجم آن

۲۶۱ — جمع دو عدد ۱۳ است و جمع دو جذر آنها ۵ مطلوبست آن دو عدد

۲۶۲ — ظرف استوانه شکلی داریم بگنجایش ۶۰۰ گره مکعب و با ارتفاع ۸ گره مطلوب است قطر قاعده آن

۲۶۳ — عایدی ربح دو سرمایه ۶۵ ۷ ۵ تومان و ۲۵ ۸۱۶ تومان جمعاً در یکسال ۵۶۰ تومان و تفاضل آن دو ربح ۲۶۵ تومان مطلوبست نرخ مراجه

۲۶۴ — مطلوب است طول اضلاع مثلث تام الزاویه که مجموع آنها ۳۰ ذرع باشد و تفاضل مابین یکی از آن دو ضلع و وتر ۸ ذرع

۲۶۵ — سه نهر وارد حوضی میشوند اوّلی و دوّمی باهم آنرا در ۸ ساعت پر میکنند و اوّلی و سیمی در ۹ ساعت و دوّمی و سیمی در ۱۰ ساعت مطلوبست ساعاتی که هر یک جداگانه آنرا توانند پر نمود

۲۶۶ — دو مبلغ سرمایه جمعاً ۷۹۵۵ قران میشود و بیک نرخ مراجه رفته نوبت

اول سرمایه اول ۳ ماه مرابحه بوده و دومی ۴ ماه و جمع دو ربح آنها شده است

۱۳٫۷۵ قران و نوبت ثانی تفاضل دو ربح شده است ۵۵ قران و اول

۹ ماه در مرابحه بوده و دومی ۸ ماه مطلوب است دو سرمایه و نرخ آنها

۲۶۷ - مطلوب است مجموع جمله های سلسله عددی و جمله آخرش بنابر آنکه

عدد جمله ها ۸۰۳ باشد و جمله اول ۱ و قدر نسبت ۲

۲۶۸ - سرمایه است مجهول نزد صد ۵ مرابحه مرکب داده شده مدت سه سال

و در اول هر سال اصلا فرعا تجدید شده و بهمه جهة مبلغ ۱۶۵۵٫۰۶۲۵

قران شده

۲۶۹ - مطلوب است جمع جمله های سلسله عددی و جمله اولش بنابر آنکه جمله اخیر

۷۵ باشد و قدر نسبت ۲ و عدد جمله ها ۳۸

۲۷۰ - شخصی ۵۰۰ تومان سرمایه را به بانک مرابحه داد مدت ده سال و هر

سال بقدر $\frac{1}{12}$ از اصل فایده بخشید میخواهیم بدانیم که بعد از آن مدت بهمه

جهة چه مبلغ عاید او میشود

۲۷۱ - شهری را در ساحل زیاد آب میگیرد و رفته رفته اهالی آنجا را خالی کردند هر سال

$\frac{1}{10}$ جمعیت موجود بیرون میرفت و امروز صاحب ۲۰۰۰۰ نفر جمعیت است

میخواهیم بدانیم تا ۱۲ سال دیگر چه باقی میماند

۲۷۲ - مطلوب است عدد جمله های سلسله عددی و قدر نسبتش بنابر آنکه

مجموع جمله ها ۱۴۴۴ باشد و جملهٔ اول ۱ و جملهٔ اخیر ۷۵

۲۷۳ — مطلوب است جملهٔ اول و قدر نسبت سلسلهٔ عددی که مجموع جمله هایش ۱۴۴۴ باشد و جملهٔ اخیر ۷۵ و عدد جمله ها ۳۸

۲۷۴ — تفاضل دو عدد ۳ است و تفاضل مکعب آنها ۱۱۷ مطلوب است آن دو عدد

۲۷۵ — مطلوب است مجموع و عدهٔ جمله ها بنا بر آنکه قدر نسبت ۳ باشد و جمع جمله ها ۱۳۸۵ و جملهٔ اخیر ۸۸

۲۷۶ — مطلوب است جملهٔ اول سلسلهٔ عددی ... مطلوب عدد ... عددی که جملهٔ اولش ۱ باشد و جملهٔ اخیر ۸۸ و قدر نسبت ۳

۲۷۷ — مساحت مثلث متساوی الاضلاعی معلوم است و مطلوب باشد مساحت دایرهٔ محیطه بر آن مثلث

۲۷۸ — سرمایهٔ شخصی هر سال بقدر $\frac{1}{12}$ می افزاید در مدت ۱۰ سال متوالی و در آخر رسید بمبلغ ۶٫۸۹۰۵ قران پس روز اول چه قدر دارا بوده

۲۷۹ — مطلوب است حجم چهار وجهیکه طول ضلعش a باشد

۲۸۰ — شخصی که ابتدا صاحب ۴۰۰ تومان سرمایه بود و به هر سال می افزاید تا بعد از ۱۰ سال صاحب ۶٫۸۹۰۵ قران سرمایه شد میخواهیم بدانیم هر سالی بچه نسبت افزوده

۲۸۱ — مطلوب است جملهٔ اخیر و قدر نسبت سلسلهٔ عددی که عدد جمله هایش

جمله ایش ۳۰ باشد و مجموع آنها ۱۳۳۵ وجملهٔ اول ۱

۲۸۲ - مطلوب است جملهٔ اخیر سلسلهٔ عددی و عدهٔ جملها بنابر آنکه قدر نسبت ۳ باشد و جمع جملها ۳۵ وجملهٔ اول ۱

۲۸۳ - سرمایه است بمبلغ ۴۰۰ تومان بعد از چند سال در مرابحهٔ بانک بشود ۸۹۵٫۵۶ تومان بنابر آنکه هر سال $\frac{1}{12}$ بیفزاید

۲۸۴ - مطلوب است جمع جمله های سلسلهٔ عددی و قدر نسبت بنابر آنکه جملهٔ اول ۱ باشد وجملهٔ اخیر ۸ ۸ و عدد جملهها ۳۰

۲۸۵ - مطلوب است چهار جملهٔ سلسلهٔ هندسی بنابر آنکه بدانیم اولاً فضل جملهٔ اول بر دوم ۴ است و ثانیاً فضل سیم بر چهارم ۳ و ثالثاً جمع مربعات چهار جمله ۶۲٫۵

۲۸۶ - در خمره که صد پیمانه سرکهٔ خالص دارد سی نوبت متوالی یک پیمانه برداشتیم و بجای آن آب ریختیم پس بعد از برداشتن پیمانهٔ سیام چه قدر سرکه در آن خم باقی مانده

۲۸۷ - شخصی با سرمایهٔ ۲۰۰۰ تومان مرتکب شغل نامناسبی شد که هر سال $\frac{1}{15}$ مبلغ موجود ضرر میکرد پس بعد از چند سال صاحب همین مبلغ ۸۰۴٫۵۶ تومان خواهد شد

در علم طبیعی ذکر شده که وزن هر جسم مساوی است با حاصل ضرب حجمش در وزن

مخصوص

مخصوص است که کثافت آن جسم کوئیم بشکل این دستور $P = V D$
واین نشان داد را توان حل نمود نسبت بهر یک از سه مقدار P و V و D

$$V = \frac{P}{D}$$

$$D = \frac{P}{V}$$

۲۸۸ - مطلوبست حجم تخته سربی که بوزن ۲۵۰ کیلو باشد
بنابر آنکه کثافت سرب ۱۱٫۳۵ است

۲۸۹ - مطلوبست وزن ۷۵۰ دسیمتر مکعب ریخته
بنابر آنکه کثافتش ۷٫۰۵ باشد

۲۹۰ - مطلوبست کثافت جسمی که حجم ۴ دسیمتر مکعب
باشد وبوزن ۲۵ کیلو

تنبیه - هرگاه وزن بحسب من تبریز معین شده باشد باید آنرا بکیلو
گرم تحویل نمود یا وزن مخصوص را که عبارت از وزن یک سانتیمتر مکعب
از الجسم باشد نسبت بوزن یک سانتیمتر مکعب آب که یک گرم است
تحویل نمود بمثقال ونخود ونسبت این مقیاسهای متری را با مقیاسهای
ایران در وسیلة الحساب ذکر نموده ایم

۲۹۱ - دستور شاغول اینست $ت = \pi\sqrt{\frac{ل}{ع}}$ ومطلوبست
حل این معادله نسبت به ل آنرا در دستور $ع ت = و$ و $\frac{ع ت^{۲}}{۲} = ج$

نفر

نظر بست باد و قاعده ذیل که تعلق بسقوط اجسام دارند

قاعدهٔ اول - سرعت سیر جسم ساقط در خلاء می فزاید بر نسبت زمان سقوط

قاعدهٔ دوم - مسافتیکه جسم ساقط در خلاء طی میکند بر نسبت مجذورات ازمنه است که طی مسافات نموده

و چون سه جمله از این چهار جمله س و ع و ن و ج درست باشد میتوان جمله چهارم را استخراج نمود حرف س عبارت است از سرعت جسم بعد از طی ن ثانیه زمان و ع سرعت جسم است بعد از ۱ ثانیه سقوط و ج مسافتی است که بعد از ن ثانیه جسم ساقط پیموده و مقدار ع در افق پاریس است ۹٫۸۰۸۸ متر و در افق طهران به تشخیص کرشش ۹٫۷۹۶۷ متر

۲۹۲ - مطلوب است مسافت پیمودهٔ جسم ساقط در افق پاریس در ظرف ۲۰ ثانیه سقوط

۲۹۳ - جسمی در پاریس از ارتفاع ۴۰۰ متر افتاد در فضاء خلاء پس تا چند ثانیه در راه بوده

۲۹۴ - جسمی در فضای خالی مسافت ۴۰۰ متر طی نمود میخواهیم بدانیم چه سرعتی گرفته است

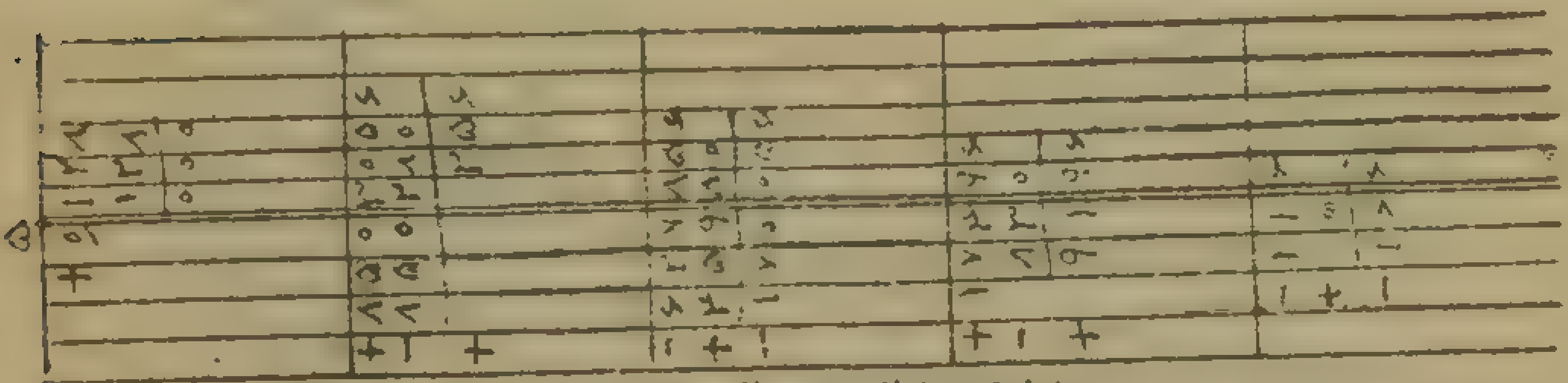
۲۹۵ - معلوم کنید عمق چاهی را که جسمی بعد از ۳ ثانیه از لحظه سقوط در آنجا صوت افتادنش در قعر چاه بگوش رسید

واین فقره را هم از خارج میدانیم که سرعت سیر صوت در هر ثانیه ۳۳۷ متر است

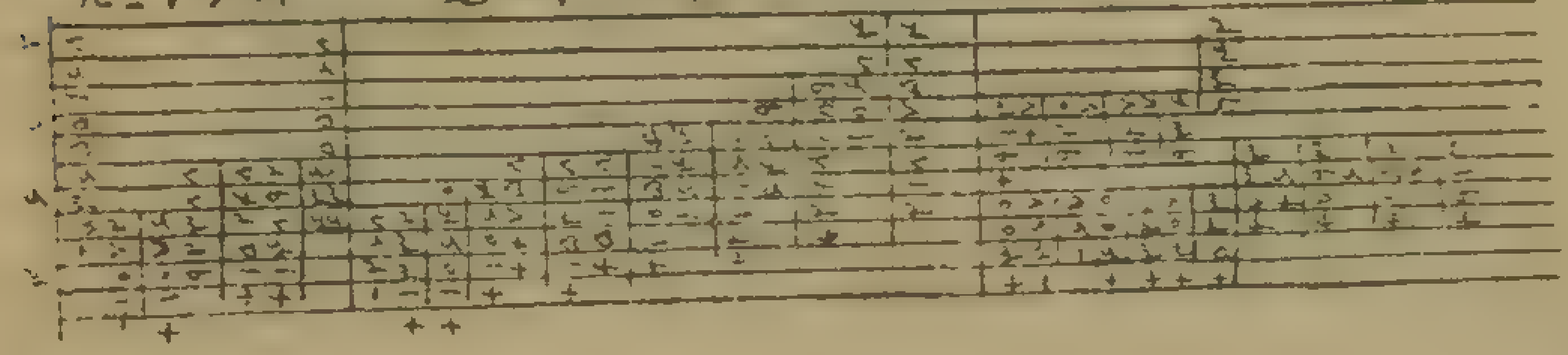
واینجا دستور حل معادلات درجات عالیه جبر ومقابله را در ضمن چند مثال مینمائیم موافق قانونی که مرحوم والد حقیر غیاث الدین جمشید ثانی جناب اخوند ملاعلی محمد اصفهانی طاب ثراه وضع نموده اند و آن رساله را چند نفر از تربیت یافتگان حقیر در مدرسه دار الفنون استنساخ نموده اند و شاید بعضی حق ناشناسان نسبت آنرا بخود یا بدیگران دهند لهذا لازم شد اشاره کند که در این عصر از هفتاد سال قبل هر کس در اصفهان یا طهران فنون ریاضی و نجوم ایرانی و فرنگی و فنون غریبه آموخته باشد منشاء و مولد و سرچشمه اش در خانواده مرحوم والد بوده و از این محل کسب نموده بی واسطه یا با واسطه غ‍بد الغفار

در حل این معادله درجه پنجم

$$x^5 - 21.6x^4 + 171.996x^3 - 629.856x^2 + 859.305x = 0.128$$



$x = 4672$ $x^3 - 4675x^2 = 43155168$



جدول فهرست

	صفحات
دیباچه	۲
باب اوّل	
فصل اوّل - تعریفات	۴
غرض و موضوع جبر و مقابله - استعمال حروف در جبر و مقابله	۴
علامات جبری	۵
توضیح اصطلاحات	۷
معبّر - مقتدر و رادیکال و جمله	۷
یک جمله - دو جمله - سه جمله و کثیر الجمله	۸
جمله های متشابهه	۹
فصل دوم - جمع	۹
امثله و مسائل	۱۱
فصل سیم - تفریق	۱۳
امثله و مسائل	۱۵
فصل چهارم - ضرب	۱۶
قاعدهٔ حروف و قاعدهٔ معتبرین	۱۷
قاعدهٔ درجات و قاعدهٔ علامات	۱۸

گذشتن

	صفحه
گذاشتن مقداری در عامل مشترک	۲۲
امثله و مسائل	۲۳
فصل ۵ قسمت	۲۵
قسمت یک جمله ها	۲۸
قوة صفر و قوت منفی	۲۸
قسمت کثیر الجمله بر یک جمله	۲۹
قسمت کثیر الجمله بر کثیر الجمله	۲۹
امثله و مسائل	۳۲
کسور جبری	۳۵
فصل ۶ در معادلات	۳۵
تساوی اتحاد و معادله	۳۵
درجهٔ معادله	۳۷
غرض از حل کردن معادله	۳۷
فصل ۷ در معادلات درجهٔ اول با یک مجهول	۳۸
علوم متعارفه مبنای حل معادلات	۳۸
دستور حل معادلهٔ درجهٔ اول با یک مجهول	۴۱
امثله	۴۸

فصل

	صفحه
فصل ۸ - گذاشتن مسائل معادلات	۴۹
دستور گذاشتن مسائل بمعادلات	۴۹
حل مسائل درجهٔ اول بایک مجهول	۴۹
کلی ساختن بعضی مسائل	۶۲
مسائل حل نمودنی	۶۸
فصل ۹ معادلات درجهٔ اول با چند مجهول	۷۵
مسائل معینه - مسائل غیر معینه که مستحیله گوئیم	۷۱
دستور خارج کردن مجهول	۷۲
اخراج مجهول بعمل تفریق	
حل دستگاه دو معادله	۷۴
حل معادلات چند درجهٔ اول - دستور	۷۶
* اخراج مجهول بعمل مقایسه	۸۷
دستورات کلی در حل دستگاه دو معادله	۹۲
* اخراج مجهول بعمل تحویل و اختصار	۹۴
امثله	۹۹
مسائل حل شده	۱۰۰
مسائل حل کردنی	۱۰۸

فصل

صفحه

فصل دهم - در مجذور و جذر مقادیر جبریه ۱۰۹
در مجذور مقداری و مجذور یک جمله و مجذور کسر ۱۱۰
مجذور دو جمله - هر دو جمله هرگز نتواند مجذور کامل بود
در جمله ممکن است جزو مجذور کامل باشد ۱۱۱
استخراج جذر مقادیر جبریه ۱۱۲
دستور برای یک جمله
در مقدار منطق - مقدار اصم ۱۱۳
جذر موهوم
جذر کسر ۱۱۵
جذر سه جمله ۱۱۵
فصل ۱۱ - حل معادلات درجهٔ دوم ۱۱۶
معادلهٔ تام درجهٔ دوم و معادلهٔ غیر تام ۱۱۷
حل معادلهٔ تام درجهٔ دوم ۱۱۲
در روابط ما بین اضلاع و معتبرهای معادله ۱۲۸
در حل معادلات مربعین ۱۳۱
در حل معادلات اصم ۱۳۳
امثله ۱۳۵

صفحه

مسائل حل شده ۱۳۵

مسائل حل کردنی ۱۳۹

فصل ۱۲ – در نسبت ها و تناسبات ۱۴۰

نسبت تفریقی – نسبت تقسیمی

در کلیه نسبت ها – تعریفات

در تناسبات حسابی که یک فضلی نیز گوئیم و خصائص آنها ۱۴۲

در تناسبات هندسی و خصائص آنها ۱۴۳

فصل ۱۳ – در سلسله ها ۱۵۱

در سلسله های حسابی و خصائص آنها ۱۵۱

در سلسله های هندسی و خصائص آنها ۱۶۰

دستورات متعلق بسلسله ها حسابی و هندسی ۱۷۲

امثله و مسائل در تناسبات و سلسله ها ۱۷۳

فصل ۱۴ در لگاریتم ۱۷۶

خصائص لگاریتم ۱۷۷

لگاریتم مشهور ۱۸۰

جداول لگاریتم و دستور استعمال آنها ۱۸۵

تقریبات محاسبات بعمل لگاریتم ۱۹۶

اعمال

صفحه

اعمال در لگاریتم ۱۹۷
در محاسبات بمدد لگاریتم ۲۰۰
ربح مرکب ۲۰۷
مسائل ۲۱۰
قسط السنین ۲۱۰
مسائل ۲۱۲
فصل ۱۵ - مسائل اکثر و اقل ۲۱۹

باب دوم

* فصل اول مسائل سیاله درجه اول ۲۲۶
عدد محدود جوابها - عدد غیر محدود جوابها ۲۳۵
جوابهای مسائل سیاله تولید میکنند سلسله های حسابی را ۲۳۶
مسائل ۲۴۹
* فصل ۲ - جوابهائیکه از جبر و مقابله بر میآید ۲۵۰
علامت $\frac{m}{0}$ ۲۵۳
علامت $\frac{0}{0}$ ۲۵۴
علامت $\frac{0}{m}$ ۲۵۴
* فصل ۳ - تشکیل قوای مختلفه دو جمله $a+b$ و استخراج هر ضلعی ۲۵۵

دستور

صفحه

دستور نوشتن هر قوت دو جمله $a + b$ بی درنگ ۲۵۵

* فصل ۴ – در علم ترکیب بندیها ۲۵۹

تبدیل بندی – ترتیب بندی – ترکیب بندی ۲۶۰

در محاسبات تبدیل بندی m حرف ۲۶۰

در محاسبات ترتیب بندی m به m حرف در میان m حروف ۲۶۲

در محاسبات ترکیب بندی n به n حرف در میان m حروف ۲۶۴

دستور کلی جملتین نوشتن ۲۶۸

* فصل ۵ – در کسور متصله که سلسله نیز گویند ۲۷۰

تحویل کسر متعارفی بکسر متصل ۲۷۱

یافتن کسر متعارفی که مولد کسر متصل بوده ۲۷۱

فصل ۶ – در خصائص بعضی اعداد ۲۷۴

عدد ۳ ۲۷۴

عدد ۶ ۲۷۴

عدد ۹ ۲۷۵

عدد ۳۷ ۲۷۶

اعداد تام ۲۷۶

اعداد متحابه ۲۷۷

تفاضلات عجیبه ۲۷۷

اعداد

صفحه

* اعداد متشکله	۲۷۸
* اعداد مخروطیهٔ مثلثه	۲۷۹
اشکال ملسی	۲۷۹
مثلث حسابی پاسکال	۲۸۰
* فصل ۷ مسئله	۲۸۱
یافتن مساحت مثلثی که سه ضلعش در دست باشد	۲۸۱
* فصل ۸ جواب مسائل سبعهٔ لاینحل خلاصة الحساب	۲۸۶
امثله و مسائل در کلیات کتاب	۲۹۰
دستور حل معادلات درجات عالیه جبر و مقابله بطریق حد ول اختراع مرحوم والد حقیر	۳۱۳ – ۳۱۶

۶- ۳ ۷ ۸

- ۲
- ۵ ۶ ۱ ۶ ۳x + ۹٪ - ۶-
- ۳ ۸ ۴
- ۳ ۵ ۴ ۷ ۱۴ ۷
- ۸ ۵ ۲ ۵ ۲
- ۷ ۱ ۳ ۵ ۷ ۸ ۵ ۳
- ۸ ۸ ۹ ۵ ۱ ۴ ۷

+ ۴
۹
+ ۳ ۶
۷ ۶
+ ۱ ۵ ۵ ۸
۴ ۴ ۳ ۹
+ ۱ ۵ ۱ ۲ ۲ ۶
۴ ۵ ۵ ۸
۱ ۵ ۱ ۸ ۵ ۷
۱ ۳ ۲ ۷ ۹
+ ۱ ۵ ۱ ۹ ۳ ۱ ۷ ۹
۱ ۳ ۳ ۲ ۸
+ ۱ ۵ ۲ ۵ ۷ ۳ ۵ ۷

- ۶
- ۱ ۲
- ۱ ۸
- ۱ ۸ ۳
۱ ۸ ۶
- ۱ ۸ ۹ ۷
- ۱ ۹ ۵ ۴
- ۱ ۹ ۱ ۱ ۸

ختم کتاب

مسئله صد من سرکه درخی بوده یکمن ازان سرکه را برداشتیم و یکمن آب فرضی که هیچ قیمت نداشته باشد بجای ان ریختیم و بعد از ان ممزوج کردن آب و سرکه باز یکمن دیگر ازان برداشتیم و یکمن آب بجای آن ریختیم حاصل که قیمت سرکه در اول ۳۰ شاهی بود اینقدر در این عمل را بجا آوردیم که ان سرکه یکمن یکشاهی میارزید مطلوبست عدد مراتب سرکه برداشتن و آب بجای ان ریختن جواب میگوئیم که ملخص سؤال اینست که در هر یک جزو از ۹۹ جزو سرکه آب مخلوط ان کردند که نسبت هر یک الی غیر النهایه بعینه نسبت مثل و یک جزو از ۹۹ جزو بوده باشد پس بنابرین حاجت به برداشتن سرکه نیست بلکه همین قدر کفایت میکند که میگوئیم که در صد من سرکه $\frac{1}{99}$ جزو ان آب داخل کردند و باز در مجموع ان بهمان نسبت تا وقتی که قیمت ان یکمن یکشاهی گردید و این خود ظاهر است که باید در هر یک من سرکه سی و پنج من آب داخل شود تا مجموع ۳۰ من گردد و چون فرض آنست که آب را قیمتی نبوده پس مجموع ۳۰ من به ۳۰ شاهی یک من یکشاهی میشود پس در صد من سرکه باید سه هزار و پانصد من آب داخل شود تا مجموع سه هزار و ششصد من گردد پس بنابرین صد مبدا باشد و ۳۶۰۰ منتهی و $\frac{1}{99}$ اقدر نسبت و بقاعده

لگاریتم باید لك صد را از لك ۳۶۰۰ کم نمود باقی را بر لك نقد نسبت بعد از تحویل بجرج اعشار یعنی ۱٫۰۱ امر قسمت نمود و بر خارج قسمت یکی افزود حاصل عده مراتب است صورت عمل اینست

لك ۳۶۰۰ =	۳٫۵۵۶۳۰۲۵۰
لك ۱۰۰ =	۲٫
مقسوم =	۱٫۵۵۶۳۰۲۵۰
مقسوم علیه لك ۱۰۱۰ یا ۱٫۰۱ =	۰٫۰۰۴۳۶۴۳۷
خارج قسمت =	۳۵۶٫۵۰
	۱
عده مراتب =	۳۵۷٫

واگر بخواهیم بدانیم که در صد من سرکه و آب در دفعه آخر که یکمن یکسان می ارزد چند من سرکه دارد و چند من آب باید به متناسبه ساخت باین نحو $36:100=1:x$ صد را در یک[1] ضرب نمود حاصل را بر ۳۶ قسمت کرد خارج قسمت

۲٫۷۷۷ من جواب است

معادلات اولا

$$x+y=a$$
$$x^2+y^2=b$$

جواب $\frac{a+\sqrt{2b-a^2}}{2}$ و $\frac{a-\sqrt{2b-a^2}}{2}$

معادله ۲ $xy=255$ ، $x^2+y^2=514$

جواب ۱۵ و ۱۷

معادله ۳ $x+y=39$ ، $x^3+y^3=17199$

جواب ۱۵ و ۲۴

معادله ۴ $x+y=16$, $xy+x^2+y^2=208$

جواب ۴ , ۱۲

معادله ۵ $x+\sqrt{x}=1332$

جواب ۱۲۹۶

معادله ۶ $x-\sqrt{x}=48\frac{3}{4}$

جواب $56\frac{1}{4}$

نوع مسائلی که میتوان حل نمود از روی معادلات درجهٔ دوم بنابر انکه مجهولات را مناسب اختیار کنیم

$$(x-y)(x^2-y^2)=160$$

$$(x+y)(x^2+y^2)=580$$

فرض میکنیم $x+y=t$ و $xy=z$

انوقت دو معادله ما چنین شوند

$$(t^2-2z)t=580, \quad (t^2-4z)t=160$$

وچون t و z بدست آیند یعنی مجموع وحاصل ضرب دو عدد این دو عدد

ریشه های این معادله اند $x^2-tx+z=0$ جواب ۷ و ۳

حل معادله سیاله درجه دوم بعدد صحیح $3xy-7x-7y=5$

و چون نسبت را حل کنیم چنین شود $y = \frac{7x+5}{3x+7} = \frac{7}{3} + \frac{\frac{64}{3}}{3x-7}$

پس باید اولاً که $3x-7$ یکی از عادکننده‌های ۶۴ شود تا ثانیاً $7 + \frac{64}{3x-7}$

مضرب شود از سه ۳ و از برای غایت شرط اول باید $3x-7$ یکی از

ذیل باشد $3x-7 = 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64$

و علاوه بر این نظر باینکه x صحیح شود باید که از عادکننده‌ها بعلاوه ۷ مضرب شود

از ۳ پس مفاد هر که بتوان اختیار شود همین‌ها است $3x-7=2$ ، $3x-7=8$

و از اینها $x = 3$ ، $y = 13$ و نیز $x = 5$ ، $y = 5$

مسئله عددی مطلوب است که چون قسمت کنیم بر ۸ و ۱۵ باقی ماند بشوند ۳ و ۷ فرض میکنیم اولاً x ، y

N و نیز خارج قسمت این عدد بر ۸ و بر ۱۵ انوقت

$N = 8x+3$ و $N = 15y+7$

و بنابراین $8x+3 = 15y+7$ یا $8x - 15y = 4$

و چون بر x قسمت دهیم $x = \frac{15y+4}{8}$ و این را باین صورت در آوریم

$x = \frac{16y - y + 4}{8}$ و فرض میکنیم $\frac{4-y}{8} = n$ انوقت $y = 4 - 8n$

و از اینها $x = 8 - 15n$ و چون یکی از این دو مقدار را در تعبیر N گذاریم چنین شود

$N = 67 - 120n$ و چون برای n مقادیر ذیل را فرض کنیم

$0, -1, -2, -3, \ldots$ الی غیر نهایة اعداد مطلوب چنین شوند

$67, 187, 307, 427, \ldots$

ختم